WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

24. September 2002

Nachklausur Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede surjektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv.

Lösung: *Richtig,* denn φ ist genau dann surjektiv, wenn $\dim \operatorname{Bild} \varphi = n$ ist. Dann ist nach der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Kern} \varphi = n - \dim \operatorname{Bild} \varphi = 0$, die Abbildung ist also auch injektiv und somit bijektiv.

2) Richtig oder falsch: $\{1, \cos x, \cos 2x\}$ ist eine Basis des von $\cos x, \cos^2 x$ und $\sin^2 x$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lösung: *Richtig,* denn $\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ und $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. (Lineare Unabhängigkeit ist klar wegen der verschiedenen Perioden.)

3) Was ist $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$?

Lösung: Null, denn es gibt doppelt vorkommende Zeilen (und auch Spalten).

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2 \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist linear.

Lösung: *Richtig,* denn sie ist die Identität. ($0^2 = 0$ und $1^2 = 1$; andere Elemente gibt es nicht in $\mathbb{F}_2$.)

5) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\binom{1}{i}$ und $\binom{i}{1} \in \mathbb{C}^2$ sind orthogonal zueinander.

Lösung: *Richtig,* denn $\binom{1}{i} \cdot \binom{i}{1} = 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} = -i + i = 0$

6) Was ist $\operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \sin^2 yz \\ \cos^2 xz \\ \sin^2 xy \end{pmatrix}$?

Lösung: Die Divergenz der Rotation eines beliebigen Vektorfelds ist die Nullfunktion, und deren Gradient ist das Nullvektorfeld.

7) Was ist $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ für $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1 \right\}$? .

Lösung: Das Volumen einer Halbkugel vom Radius eins, also $\frac{2}{3}\pi$.

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens vier.

a) Finden Sie eine Basis von V!

Lösung: Die einfachste solche Basis besteht aus den x-Potenzen $1, x, x^2, x^3$ und x^4.

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift

$$f \mapsto \varphi(f)\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 f'''(x) \end{cases}$$

definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Die dritte Ableitung eines Polynoms vom Grad höchstens vier ist ein Polynom vom Grad höchstens eins; Multiplikation mit x^2 macht daraus ein Polynom vom Grad höchstens drei. Also liegt $\varphi(f)$ für $f \in V$ wieder in V.

Auch die Linearität von f ist unproblematisch, denn da die einfache Differentiation eine lineare Operation ist, gilt dasselbe auch für die dreifache, und auch die Multiplikation eines Polynoms mit x^2 ist eine lineare Operation, denn für zwei Polynome f, g und reelle Zahlen λ, μ ist

$$x^2(\lambda f + \mu g) = \lambda(x^2 f) + \mu(x^2 g)\,.$$

Somit ist auch die zusammengesetzte Abbildung φ linear.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern und Bild von φ!

Lösung: $\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = x^2(3 \cdot 2 \cdot d + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot ex) = 6dx^2 + 24ex^3$.
Somit liegen genau die Polynome vom Grad höchstens zwei im Kern; eine Basis davon ist etwa $\{1, x, x^2\}$.

Das Bild besteht aus allen Polynomen der Form $\alpha x^2 + \beta x^3$, hat also beispielsweise $\{x^2, x^3\}$ als Basis.

d) Zeigen Sie: $\varphi \circ \varphi \circ \varphi\colon V \to V$ ist die Nullabbildung.

Lösung: $(\varphi \circ \varphi)(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = \varphi(6dx^2 + 24ex^3) = 6 \cdot 24 \cdot ex^2$, und die nochmalige Anwendung von φ auf dieses quadratische Polynom liefert das Nullpolynom.

e) Welche Dimension hat der Durchschnitt von Kern und Bild?

Lösung: Im Durchschnitt von Kern und Bild liegen genau die Polynome der Form λx^2, er ist also eindimensional.

f) Welche Dimension hat das Erzeugnis von Kern und Bild?

Lösung: Dieses besteht aus allen Polynomen vom Grad höchsten drei, ist also vierdimensional.

g) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: Die Basisvektoren seien so angeordnet, wie oben in *a)*. Da in den Spalten der Abbildungsmatrix die Bilder der Basisvektoren stehen, ist die Abbildungsmatrix nach obiger expliziter Formel gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

h) Was ist A^3 ?

Lösung: A^3 ist die Abbildungsmatrix von $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$, was nach *d)* gleich der Nullabbildung ist. Also ist A^3 die Nullmatrix.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} w + 2x + 3y + 4z & = 5 & (1) \\ w + 3x + y + 4z & = 6 & (2) \\ 2w + 5x + 5y + (8-a)z & = 11 & (3) \\ x - 3y + a^2 z & = a & (4) \end{array}$$

Lösung: Zur Elimination von w aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der dritten und einmal von der zweiten:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & \quad 1 & (5) \\ x - y - az & = 1 & (6) \\ x - 3y + a^2 z & = a & (4) \end{array}$$

Als nächstes soll y aus den Gleichungen (6) und (4) eliminiert werden; dazu subtrahieren wir jeweils Gleichung (5):

$$\begin{array}{rcl} y - az & = 0 & (7) \\ -y + a^2 z & = a - 1 & (8) \end{array}$$

Addition dieser beiden Gleichungen führt auf

$$(a^2 - a)z = a - 1 \,.$$

Für $a \neq 1$ können wir kürzen und erhalten $az = 1$; diese Gleichung (und damit das gesamte Gleichungssystem) ist unlösbar für $a = 0$ und hat ansonsten die eindeutige Lösung $z = \frac{1}{a}$.
Für $a = 1$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die für jeden Wert $z = \lambda$ erfüllt ist.
Für $a \neq 0$ liefert Gleichung (7) die Beziehung

$$y = az = \begin{cases} a \cdot \frac{1}{a} = 1 & \text{für } a \neq 0, 1 \\ \lambda & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

Einsetzen in Gleichung (5) zeigt, daß

$$x = 1 + 2y = \begin{cases} 3 & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 1 + 2\lambda & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

ist, und aus Gleichung (1) schließlich folgt

$$w = 5 - 2x - 3y - 4z = \begin{cases} 5 - 6 - 3 - \frac{4}{a} = -4 - \frac{4}{a} & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 5 - 2 - 4\lambda - 3\lambda - 4\lambda = 3 - 11\lambda & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

Insgesamt ist also $\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(-4 - \frac{4}{a}, 3, 1, \frac{1}{a}\right)\right\} & \text{für } a \neq 0 \text{ und } a \neq 1 \\ \left\{(3 - 11\lambda, 1 + 2\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = 1 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so daß $LA = R$ ist!

Lösung: Wir schreiben die Einheitsmatrix neben A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und subtrahieren, zur Elimination der Drei aus A, in beiden Matrizen dreimal die erste Zeile von der zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir bereits Dreiecksmatrizen, d.h.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrix R^{-1} !

Lösung: Das geht natürlich einfach nach Schema F; noch einfacher wird es aber, wenn man sich an die Formel

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erinnert; danach ist

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Schreiben Sie A^{-1} als Ausdruck in L und R und berechnen Sie diese Matrix!

Lösung: Aus $LA = R$ folgt $A = L^{-1}R$ und $A^{-1} = R^{-1}L$. Daraus läßt sich A^{-1} durch Multiplikation bestimmen; man kann aber auch die Rechnung aus *a)* noch einen Schritt weiter führen um links die Einheitsmatrix zu erhalten, indem man zweimal die zweite Zeile von der ersten subtrahiert. Dies führt rechts auf

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Was ist $\det A^{10}$?

Lösung: $\det A = \det R$ ist das Produkt der Diagonalelemente von R, also eins. Nach dem Multiplikationssatz für Determinanten ist dann auch

$$\det A^{10} = (\det A)^{10} = 1\,.$$

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine mindestens zweifach stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{div}(f \cdot \nabla f) = f\,\Delta f + \nabla f \cdot \nabla f$$

Lösung: Mit der Abkürzung $f_i \underset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ist $\nabla f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ und $f \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} ff_1 \\ \vdots \\ ff_n \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f \cdot \nabla f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} ff_i = \sum_{i=1}^{n} \left(f\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(f\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + f_i^2 \right) \\ &= f \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f\,\Delta f + \nabla f \cdot \nabla f\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome fünften Grades

a) für $f(x) = \sin x$ um den Punkt $x = \pi$

Lösung: Gesucht ist das Polynom $T_5(h)$, für das $\sin(\pi + h) = T_5(h) + o(h^5)$ ist; zu seiner Berechnung kann man entweder $\pi + h$ in die „übliche“ TAYLOR-Reihe des Sinus um den Nullpunkt einsetzen oder, besser, sich zunächst überlegen, daß $\sin(\pi + h) = -\sin h$ ist und damit

$$T_5(h) = -\left(h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{120} \right) = -h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{120}\,.$$

b) für $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten; laut Analysis I ist

$$\sin z = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{z^{2i+1}}{(2i+1)!}\,, \quad \text{also} \quad \sin(x^2 + y^2) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(x^2 + y^2)^{2i+1}}{(2i+1)!}\,.$$

Uns interessieren nur Terme vom Grad höchstens fünf; da bereits in $(x^2 + y^2)^3$ alle Terme Grad sechs haben, ist das gesuchte Polynom einfach $T_5(x, y) = x^2 + y^2$.

c) für $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^4 + z^2}$ um den Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Lösung: Auch das geht am schnellsten mit Einsetzen:

$$e^u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}, \quad \text{d.h.} \quad e^{x^2 + y^4 + z^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x^2 + y^4 + z^2)^i}{i!}\,.$$

Bereits in der dritten Potenz von $(x^2 + y^4 + z^2)$ stehen nur Terme vom Grad mindestens sechs, und auch in

$$(x^2 + y^4 + z^2)^2 = x^4 + y^8 + z^4 + 2x^2y^4 + 2x^2z^2 + 2y^4z^2$$

haben nur die Summanden x^4, z^4 und $2x^2z^2$ Grad kleiner oder gleich fünf. Also ist

$$T_5(x, y, z) = 1 + x^2 + z^2 + \frac{x^4}{2} + y^4 + \frac{z^4}{2} + x^2z^2\,.$$

Aufgabe 6: *(9 Punkte)*

Berechnen Sie, soweit möglich, die folgenden Integrale oder (falls sinnvoll) deren CAUCHYschen Hauptwert:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$, *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$, *c)* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$, *d)* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^4}$, *e)* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, *f)* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Lösung:

a) Für $a > 0$ ist $\displaystyle\int_a^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln a = -\ln a$; da der Logarithmus für $a \to 0$ gegen $-\infty$ geht, existiert weder das Integral noch sein CAUCHYscher Hauptwert.

b) $\displaystyle\int_{-a}^{b} \sin x\,dx = \cos a - \cos b$. Ein Grenzwert, wenn a und b unabhängig voneinander gegen unendlich gehen, existiert nicht, also existiert auch das Integral nicht.

Ob ein CAUCHYscher Hauptwert existiert, ist Definitionssache; in der Vorlesung wurde keiner definiert, aber manche Leute reden vom CAUCHYschen Hauptwert eines solchen Integrals, wenn der Grenzwert für $a = b \to \infty$ existiert, und der ist hier natürlich null.

c) Dieses Integral ist uneigentlich an der Stelle $x = 0$; zu untersuchen ist der Grenzwert von

$$\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x^3} = \left.\frac{-1}{2x^2}\right|_{-1}^{-\delta} + \left.\frac{-1}{2x^2}\right|_{\varepsilon}^{2} = \frac{-1}{2\delta^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2\delta^2},$$

wenn die positiven Zahlen δ, ε unabhängig voneinander gegen null gehen. Dieser Grenzwert existiert offensichtlich nicht.

Für den CAUCHYschen Hauptwert müssen wir untersuchen, was passiert, wenn $\varepsilon = \delta$ ist; in diesem Fall ist obige Summe gleich $3/8$, unabhängig von ε, und damit ist das auch der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ und der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals.

d) Auch dieses Integral ist uneigentlich wegen der Polstelle bei $x = 0$;

$$\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x^4} + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x^4} = \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_{-1}^{-\delta} + \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_{\varepsilon}^{2} = \frac{1}{3\delta^3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{3\varepsilon^3} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{3\varepsilon^3} + \frac{1}{3\delta^3}.$$

Dieser Ausdruck geht stets gegen unendlich, egal ob die positiven Zahlen ε und δ unabhängig voneinander oder im Gleichschritt gegen null gehen; hier existiert also weder das Integral noch der CAUCHYsche Hauptwert.

e) $\displaystyle\int_1^{a} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} a - \operatorname{arsinh} 1$, und das geht für $a \to \infty$ gegen unendlich, da auch $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$ ist. Das Integral existiert also nicht.

f) $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan a - \arctan 1 = \arctan(a) - \frac{\pi}{4}$, denn $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

Für $a \to \infty$ geht $\arctan(a)$ gegen $\pi/2$, da bekanntlich $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ bei $x = \dfrac{\pi}{2}$ seine erste Polstelle hat. Also ist

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Das Kurvenstück γ sei gegeben durch $\gamma\colon \begin{cases} [0, 10\pi] \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto \left(t\cos 2t,\ t\sin 2t,\ \sqrt{3}\,t\right) \end{cases}$.

a) Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch!

Lösung: Es handelt sich um eine kegelförmige Spirale der Höhe $10\sqrt{3}\pi$ mit zehn Windungen und Öffnungsradius 10π.

b) Welche Bogenlänge hat γ?

Lösung: Der Tangentenvektor an γ im Punkt $\gamma(t)$ ist $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - 2t\sin 2t \\ \sin 2t + 2t\cos 2t \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$; sein Skalarprodukt mit sich selbst ist

$$\begin{aligned} \dot\gamma(t)\cdot\dot\gamma(t) &= \cos^2 2t - 4t\sin 2t\cos 2t + 4t^2\sin^2 t + \sin^2 2t + 4t\sin 2t\cos 2t + 4t^2\cos t + 3 \\ &= 1 + 4t^2 + 3 = 4(1+t^2)\,, \end{aligned}$$

er hat also im Punkt mit Parameterwert t die Länge $2\sqrt{1+t^2}$. Die Gesamtlänge der Spirale ist somit

$$\begin{aligned} \int_0^{10\pi} 2\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\int_0^{10\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt &= t\sqrt{t^2+1} + \operatorname{arsinh} t\,\Big|_0^{10\pi} \\ &= 10\pi\sqrt{100\pi^2+1} + \operatorname{arsinh} 10\pi \approx 991{,}6010293\,. \end{aligned}$$