WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

24. September 2002

Nachklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede surjektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv.

2) Richtig oder falsch: $\{1, \cos x, \cos 2x\}$ ist eine Basis des von $\cos x, \cos^2 x$ und $\sin^2 x$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3) Was ist $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$?

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2 \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist linear.

5) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\binom{1}{i}$ und $\binom{i}{1} \in \mathbb{C}^2$ sind orthogonal zueinander.

6) Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{rot}\begin{pmatrix} \sin^2 yz \\ \cos^2 xz \\ \sin^2 xy \end{pmatrix}$?

7) Was ist $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ für $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1\right\}$? .

Aufgabe 1: (*11 Punkte)*
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens vier.

a) Finden Sie eine Basis von V!

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift

$$f \mapsto \varphi(f)\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 f'''(x) \end{cases}$$

definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern und Bild von φ!

d) Zeigen Sie: $\varphi \circ \varphi \circ \varphi\colon V \to V$ ist die Nullabbildung.

e) Welche Dimension hat der Durchschnitt von Kern und Bild?

f) Welche Dimension hat das Erzeugnis von Kern und Bild?

g) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

h) Was ist A^3 ?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} w + 2x + 3y + \qquad 4z &= 5 \qquad (1)\\ w + 3x + \ \ y + \qquad 4z &= 6 \qquad (2)\\ 2w + 5x + 5y + (8-a)z &= 11 \qquad (3)\\ x - 3y + \qquad a^2 z &= a \qquad (4) \end{aligned}$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so daß $LA = R$ ist!

b) Berechnen Sie die Matrix R^{-1} !

c) Schreiben Sie A^{-1} als Ausdruck in L und R und berechnen Sie diese Matrix!

d) Was ist $\det A^{10}$?

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine mindestens zweifach stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{div}(f \cdot \nabla f) = f\,\Delta f + \nabla f \cdot \nabla f$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome fünften Grades

a) für $f(x) = \sin x$ um den Punkt $x = \pi$

b) für $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ um den Punkt $(x,y) = (0,0)$

c) für $f(x,y,z) = e^{x^2+y^4+z^2}$ um den Punkt $(x,y,z) = (0,0,0)$

Aufgabe 6: *(9 Punkte)*
Berechnen Sie, soweit möglich, die folgenden Integrale oder (falls sinnvoll) deren CAUCHYschen Hauptwert:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$, *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx$, *c)* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$, *d)* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^4}$, *e)* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, *f)* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Das Kurvenstück γ sei gegeben durch $\gamma\colon \begin{cases} [0, 10\pi] \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto \left(t\cos 2t,\ t\sin 2t,\ \sqrt{3}\,t\right) \end{cases}$.

a) Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch!

b) Welche Bogenlänge hat γ?

Formelsammlung

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh} x\right) + C$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Dienstag, dem 24. September 2002, um 13^{00} Uhr