WOLFGANG K. SEILER

Tel. 2515

A5, C201

30. September 2002

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gelte: $\varphi\bigl(\varphi(\vec v)\bigr) = \varphi(\vec v)$ für alle $\vec v \in \mathbb{R}^n$, und $n \geq 2$. Dann ist φ entweder die Identität oder die Nullabbildung.

Lösung: *Falsch:* Auch jede Projektion wie etwa die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die die erste Komponente eines Vektors auf Null setzt und die restlichen Komponenten unverändert läßt, hat dieselbe Eigenschaft.

2) Richtig oder falsch: $\{x^2+1, x^2-1, (x+1)^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad höchstens zwei.

Lösung: *Richtig,* denn $1 = \frac12\bigl((x^2+1)-(x^2-1)\bigr)$, $x = \frac12\bigl((x+1)^2-(x^2+1)\bigr)$ und $x^2 = \frac12\bigl((x^2+1)+(x^2-1)\bigr)$ lassen sich aus diesen drei Elementen kombinieren, und die Dimension des Vektorraums ist drei.

3) Was ist $\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&3&0&0\\ 0&0&4&0&0&0\\ 0&5&0&0&0&0\\ 6&0&0&0&0&0 \end{vmatrix}$?

Lösung: Das könnte man relativ einfach nach LAGRANGE entwickeln, einfacher ist es aber, die erste mit der letzten, die zweite mit der fünften und die dritte mit der vierten Spalte zu vertauschen; dann ensteht eine Diagonalmatrix mit den Zahlen von eins bis sechs in der Hauptdiagonalen. Drei Spaltenvertauschungen ändern das Vorzeichen dreimal, also ist die gesuchte Determinante $-6! = -720$.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2 \\ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \mapsto xy \end{cases}$ ist linear.

Lösung: *Falsch,* denn $1 = \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \neq \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 0\,.$

5) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}\Bigg|_{-2}^{1} = -1 - \frac12 = -\frac32$

Lösung: *Falsch;* das Integral über die nirgends negative Funktion $1/x^2$ kann unmöglich negativ sein. Die Formel gilt nicht, da der Integrand (und auch die Stammfunktion) im Nullpunkt nicht definiert sind. (Hier existiert auch kein CAUCHYscher Hauptwert.)

6) Richtig oder falsch: Zu jeder stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es (mindestens) ein Vektorfeld $\vec{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so daß $f = \operatorname{div} \vec{V}$ ist. *(Hinweis: Betrachten Sie* $\int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_i$ *!)*

Lösung: *Richtig:* Da f stetig ist, existieren die $F_i(x_1, \dots, x_n) = \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_i$; nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i} = f$ und $f = \operatorname{div} \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$.

7) Was ist rot grad div $\begin{pmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{pmatrix}$?

Lösung: Das konstante Vektorfeld $\vec{0}$, denn die Rotation eines Gradienten ist stets das Nullvektorfeld.

8) γ sei die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreislinie. Was ist $\int_\gamma 2\, ds$?

Lösung: 4π, denn $\int_\gamma 1\, ds$ ist gleich der Bogenlänge 2π des Einheitskreises.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei in den beiden Variablen x und y.

a) Finden Sie eine Basis von V!

Lösung: Die einfachste solche Basis besteht aus den Monomen $1, x, y, x^2, xy$ und y^2.

b) Zeigen Sie: Der LAPLACE-Operator Δ definiert eine lineare Abbildung $V \to V$.

Lösung: Für eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion zweier Veränderlicher ist bekanntlich

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,;$$

als Summe zweier Ableitungsoperatoren ist Δ also auf jeden Fall linear. Für ein Polynom $P = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ aus V ist

$$\Delta P = 2d + 2f$$

konstant, also insbesondere ein Element von V. Somit definiert Δ eine lineare Abbildung $V \to V$.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern und Bild dieser Abbildung!

Lösung: Im Kern liegen nach obiger Rechnung genau die Polynome mit $d = -f$, eine Basis des Kerns bilden also beispielsweise die Polynome

$$1, x, y, x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad xy\,.$$

Das Bild besteht aus den konstanten Polynomen, hat also beispielsweise $\{1\}$ als Basis.

d) Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung $\Delta \circ \Delta\colon V \to V$ ist die Nullabbildung.

Lösung: Klar, denn auf eine konstante Funktion angewendet liefert Δ den Wert null.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von Δ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

Lösung: Die Basisvektoren seien so angeordnet, wie oben in *a)*. Da in den Spalten der Abbildungsmatrix die Bilder der Basisvektoren stehen, ist die Abbildungsmatrix nach obiger expliziter Formel gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Was ist A^2 ?

Lösung: A^2 ist die Abbildungsmatrix von $\Delta \circ \Delta$, was nach *d)* gleich der Nullabbildung ist. Also ist A^2 die Nullmatrix.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 && (1) \\ 2x - y + 11z &= 3 && (2) \\ 3x - 2y + (a^2+3)z &= a + 7 && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und dreimal von der dritten:

$$\begin{aligned} y + 9z &= 1 && (4) \\ y + a^2 z &= a + 4 && (5) \end{aligned}$$

Subtraktion dieser Gleichungen voneinander führt auf

$$(a^2 - 9)z = a + 3\,.$$

Der Koeffizient links verschwindet für $a = \pm 3$. Für $a = 3$ erhalten wir die unlösbare Gleichung $0z = 6$, so daß dann das gesamte System unlösbar ist; für $a = -3$ haben wir die für beliebiges $z = \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllte Gleichung $0z = 0$. In allen anderen Fällen können wir durch $a + 3$ kürzen und erhalten

$$z = \frac{1}{a-3} \quad \text{falls } a \neq \pm 3\,.$$

Einsetzen in Gleichung (4) zeigt, daß

$$y = 1 - 9z = \begin{cases} 1 - \frac{9}{a-3} = \frac{a-12}{a-3} & \text{für } a \neq \pm 3 \\ 1 - \lambda & \text{für } a = -3 \end{cases}$$

ist. Aus Gleichung (1) schließlich folgt

$$x = 1 + y - z = 1 + (1 - 9z) - z = 2 - 10z = 2 - \frac{10}{a-3} = \begin{cases} \frac{2a-16}{a-3} & \text{für } a \neq \pm 3 \\ 2 - 10\lambda & \text{für } a = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Somit ist } \mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(\frac{2a-16}{a-3}, \frac{a-12}{a-3}, \frac{1}{a-3}\right)\right\} & \text{für } a \neq \pm 3 \\ \left\{(2-10\lambda, 1-9\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = -3 \\ \emptyset & \text{für } a = 3 \end{cases} .$$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom von $f(x, y) = e^{x+y^2}$

a) vom Grad drei um den Punkt $(0, 0)$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten; Einsetzen in die bekannte Reihe

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \quad \text{liefert} \quad e^{x+y^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x+y^2)^i}{i!} .$$

Uns interessieren nur Terme vom Grad höchstens drei, als müssen nur Summanden mit $i \leq 3$ betrachtet werden, und auch aus diesen können alle Terme vom Grad größer drei eliminiert werden. Damit ist

$$T_3(x, y) = 1 + \frac{x+y^2}{1!} + \frac{x^2+2xy^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + y^2 + xy^2 + \frac{x^3}{6} .$$

b) vom Grad zwei um den Punkt $(1, 0)$

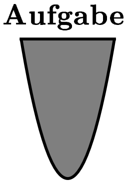
Lösung: Hier geht es also darum, die Funktion

$$f(1+h, 0+k) = e^{1+h+k^2} = e \cdot e^{h+k^2}$$

durch ein quadratisches Polynom anzunähern; dazu müssen wir (abgesehen von der Umbenennung der Variablen) einfach das gerade berechnete Polynom mit e multipliziert und alle kubischen Terme streichen:

$$T_3(h, k) = e + ex + \frac{e}{2}x^2 + ey^2 .$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*



Eine Parabelschablone stelle die Parabel $y = x^2$ dar für $-3 \leq x \leq 3$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt (grau) der Schablone!

b) Berechnen Sie den Umfang (schwarz) der Schablone! *(Hinweis: Schreiben Sie die Parabel als Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$!)*

Lösung:

a) Die Fläche unter der Parabel $y = x^2$ zwischen $x = -3$ und $x = 3$ ist

$$\int_{-3}^{3} x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^{3} = \frac{27}{3} - \frac{-27}{3} = 18 .$$

Zusammen mit der gesuchten Fläche der Schablone ist dies die Fläche des Rechtecks mit Ecken $(\pm 3, 0)$ und $(\pm 3, 9)$, das einen Inhalt von $6 \cdot 9 = 54$ hat. Die Fläche der Schablone ist also $54 - 18 = 36$.

b) Die Oberkante der Schablone hat natürlich die Länge sechs.

Hauptproblem ist die Berechnung der Länge der Parabel selbst; da in der Vorlesung nur die Bogenlänge parametrischer Kurvenstücke berechnet wurde, empfiehlt es sich, sie als Kurvenstück zu schreiben:

$$\gamma\colon [-3,3] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (t, t^2)\,.$$

Der Tangentenvektor

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

an dieses Kurvenstück hat beim Parameterwert t die Länge $\sqrt{1+4t^2}$, die Bogenlänge ist also

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} 2t\right)\Big|_{-3}^{3}$$
$$= \frac{3\sqrt{37}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{arsinh} 6 - \frac{-3\sqrt{37}}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{arsinh}(-6) = 3\sqrt{37} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} 6\,,$$

denn als Umkehrfunktion des ungeraden Sinus hyperbolicus ist auch der Areasinus hyperbolicus ungerade. Der Gesamtumfang ist somit

$$6 + 3\sqrt{37} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} 6 \approx 25{,}4941775172171150522139490041845125670654350736 75\,.$$

NB: In der Formelsammlung zur Klausur war versehentlich

$$\int \sqrt{1+at^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+at^2} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\operatorname{arsinh}(\sqrt{a}\,t)\right) + C$$

angegeben; tatsächlich ist

$$\int \sqrt{1+at^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+at^2} + \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arsinh}(\sqrt{a}\,t)\right) + C\,.$$

Fehler, die damit zusammenhängen, wurden natürlich nicht bewertet.