WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

30. September 2002

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gelte: $\varphi\big(\varphi(\vec v)\big) = \varphi(\vec v)$ für alle $\vec v \in \mathbb{R}^n$, und $n \geq 2$. Dann ist φ entweder die Identität oder die Nullabbildung.

2) Richtig oder falsch: $\{x^2+1, x^2-1, (x+1)^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad höchstens zwei.

3) Was ist $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$?

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy \end{cases}$ ist linear.

5) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}\bigg|_{-2}^{1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

6) Richtig oder falsch: Zu jeder stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es (mindestens) ein Vektorfeld $\vec V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so daß $f = \operatorname{div} \vec V$ ist. *(Hinweis: Betrachten Sie $\int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_i$!)*

7) Was ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div} \begin{pmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{pmatrix}$?

8) γ sei die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreislinie. Was ist $\int_\gamma 2\, ds$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte*)
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei in den beiden Variablen x und y.

a) Finden Sie eine Basis von V!

b) Zeigen Sie: Der LAPLACE-Operator Δ definiert eine lineare Abbildung $V \to V$.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern und Bild dieser Abbildung!

d) Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung $\Delta \circ \Delta\colon V \to V$ ist die Nullabbildung.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von Δ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

f) Was ist A^2 ?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

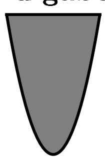
$$\begin{array}{rcrl}
x - & y + & z & = 1 \qquad (1)\\
2x - & y + & 11z & = 3 \qquad (2)\\
3x - & 2y + & (a^2+3)z & = a+7 \qquad (3)
\end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)
Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom von $f(x,y) = e^{x+y^2}$

a) vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$
b) vom Grad zwei um den Punkt $(1,0)$

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)



Eine Parabelschablone stelle die Parabel $y = x^2$ dar für $-3 \leq x \leq 3$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt (grau) der Schablone!
b) Berechnen Sie den Umfang (schwarz) der Schablone! *(Hinweis: Schreiben Sie die Parabel als Kurvenstück im* $\mathbb{R}^2$ *!)*

Formelsammlung

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\int \sqrt{1 + a t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+at^2} + \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arsinh}(\sqrt{a}\, t)\right) + C$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Montag, dem 30. September 2002, um 10^{15} Uhr