WOLFGANG K. SEILER　　　　A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15./16. Juli 2002

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den beiden Punkten $(0,0)$ und $(2,4)$!

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \cosh x$ über dem Intervall $[-c,c]$!

c) Der Graph der Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ werde parametrisiert durch $\gamma\colon [a,\,b] \to \mathbb{R}^2;\quad t \mapsto \bigl(t, f(t)\bigr)$. Unter welchen Bedingungen ist das ein reguläres Kurvenstück?

d) Nun sei $b \ge a \ge 0$, und derselbe Graph werde parametrisiert durch $\widetilde{\gamma}\colon [\sqrt{a},\,\sqrt{b}] \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \bigl(t^2, f(t^2)\bigr)$. Sind diese beiden Kurvenstücke äquivalent?

e) Das Vektorfeld $\vec{V}$ sei gegeben durch

$$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{cases}, \quad \gamma_2\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (1,0,t) \end{cases}$$

und

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} (\cos 2t, \sin 2t, 0) & \text{falls } t \le 10\pi \\ \bigl(1,0,2(t-10\pi)\bigr) & \text{falls } t \ge 10\pi \end{cases} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Integrale von $\vec{V}$ längs der γ_i! Ist das Vektorfeld $\vec{V}$ konservativ?

f) Betrachten Sie die Raute mit Ecken $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,2)$ und $(0,-2)$ als Normalbereich und berechnen Sie ihren Flächeninhalt durch Integration!

g) B sei das Innere dieser Raute. Berechnen Sie die Integrale

$$I_1 = \iint_B x\,dx\,dy, \quad I_2 = \iint_B xy\,dx\,dy \quad \text{und} \quad I_3 = \iint_B x^2\,dx\,dy\,!$$

h) Zeigen Sie das CAVALIERIsche Prinzip: Eine um die z-Achse rotationssymmetrische Figur, die in Höhe z den Radius $r(z)$ hat, hat zwischen den Höhen $z = z_1$ und $z = z_2$ das Volumen

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} r(z)^2\,dz\,.$$

i) Ein Bierglas habe oberhalb seines Stiels die Form einer um die Mittelachse rotierenden Parabel $z = x^2$. Wie hoch über dem Scheitelpunkt der Parabel sitzt der Eichstrich für einen halben Liter?

j) *Ditto* für die um die z-Achse rotierende Kurve $z = e^{x/5} - 1$. (Der Zahlenwert kann hier nur numerisch bestimmt werden; es reicht also, wenn Sie die Gleichung finden, der er genügen muß.)