

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 24./25. Juni 2002

a) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix des Vektorfelds

$$\vec{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ yz + xz + xy \\ xyz \end{pmatrix} !$$

b) Bestimmen Sie Divergenz und Rotation von  $\vec{V}$  !

c) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix des Vektorfelds

$$\vec{W}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} !$$

d) Bestimmen Sie Divergenz und Rotation von  $\vec{W}$  !

e) Was sind die Divergenz und die Rotation der linearen Funktion

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix} ?$$

f) Berechnen Sie

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} !$$

g) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 \\ -x^2 - z^2 \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix} !$$

h) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$\vec{W}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ x^2z \\ xy^2 \end{pmatrix} !$$

i) Was ist  $\Delta f$  für die Funktion  $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  ?

j) Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  hänge, in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  geschrieben, nur ab von  $\varphi$ . Wie sehen die Niveaulinien von  $f$  aus?

k) Die Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  hänge, in Kugelkoordinaten  $(r, \varphi, \vartheta)$  geschrieben, nur ab von  $\vartheta$ . Wie sehen die Niveauflächen von  $f$  aus?

l) Das Vektorfeld  $\vec{V}$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ordne dem Punkt mit Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  den Vektor  $\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$  aus  $\mathbb{R}^2$  zu. Zeigen Sie, daß dieser Vektor in jedem Punkt  $(x, y)$  senkrecht auf dem Ortsvektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  steht!

m) Bestimmen Sie durch Übergang zu Polarkoordinaten alle relativen Extrema der Funktion  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2)$  !