WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515
A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17./18. Juni 2002

a) Welche der Punktfolgen (x_n, y_n) aus $\mathbb{R}^2$ ist konvergent und wohin konvergiert sie?
1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n, y_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$

b) Was können Sie über eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

c) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

d) Wo ist die Funktion aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

e) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz \\ g(x,y,z) &= e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy) \\ h(x,y,z) &= \frac{x+y}{x-z} \\ k(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \ell(x,y,z) &= ax + by + cz + d \end{aligned}$$

f) Berechnen Sie die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} &f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; && (x,y,z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \\ &f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; && (x,y) \mapsto \sin x \cos y \\ &f_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; && (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2} \\ &f_4: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; && (x,y) \mapsto \arctan x + y \end{aligned}$$

g) Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

h) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

i) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

j) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

k) *Richtig oder falsch:* Wenn die Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar.

l) *Richtig oder falsch:* Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Falls für $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ überall $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ ist, kann $f(x,y) = 0$ überall eindeutig nach y aufgelöst werden.

m) *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ist genau dann in einer Umgebung von $(a_0, \ldots a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eindeutig nach x auflösbar, wenn x eine einfache Nullstelle des Polynoms $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ist.

n) Bestimmen Sie für $F(x,y) = xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x - 5$ alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $F(x,y) = 0$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

o) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung $F(x,y) = 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der Funktion $f(x)$, für die dort $F\big(x, f(x)\big) = 0$ ist.