WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 10./11. Juni 2002

a) $\mathbb{C}^2$ sei mit seinem Standard HERMITEschen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}!$$

b) *Richtig oder falsch:* $\mathbb{R}^2$ mit dem Produkt $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}v_1 & w_1\\v_2 & w_2\end{pmatrix}$ ist ein EUKLIDischer Vektorraum.

c) Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v}\odot\vec{w}|$ als Produkt nimmt?

d) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{cases}(v_1+2v_2)(w_1+2w_2)+4v_3w_3 & (1)\\(v_1+2v_2)(w_1+2w_2)-4v_3w_3 & (2)\\v_1w_2+v_2w_3+v_3w_1 & (3)\\v_1w_1+2v_2w_2+v_3w_3+v_2(w_1+w_3)+(v_1+v_3)w_2 & (4)\end{cases}$$

e) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x+2y+5z=0$ des $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt.

f) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die den Vektor $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ enthält!

g) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\begin{pmatrix}2\\3i\\6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2+3i\\4+3i\\6+i\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^3$ mit seinem üblichen HERMITEschen Skalarprodukt!

h) Für zwei Vektoren $\vec{v},\vec{w}$ eines EUKLIDischen Vektorraums V gilt:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{w}\|^2-\|\vec{v}\|^2-\|\vec{w}\|^2\right).$$

i) Gilt diese Formel auch für HERMITEsche Vektorräume?

j) *Richtig oder falsch:* Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V seien zwei Skalarprodukte $\cdot$ und $\odot$ definiert derart, daß für alle Vektoren $\vec{v}\in V$ gilt $\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{v}\odot\vec{v}$. Dann ist $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{v}\odot\vec{w}$ für alle $\vec{v},\vec{w}\in V$.

k) Gibt es ein HERMITEsches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, das nur reelle Werte annimmt?

l) M sei der Vektorraum aller reeller $n\times m$-Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M?

$$\|A\|_1=\max_{(i,j)}|a_{ij}|,\quad \|A\|_2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|,\quad \|A\|_3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2,$$

$$\|A\|_4=\max_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2},\quad \|A\|_5=\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2}$$