WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3./4. Juni 2002

a) Berechnen Sie die Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \,!$$

b) Für $n \geq 2$ sei $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{falls } i = j \text{ oder } j = n \\ 1 & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie: $\det A = (n-1)\cdot(n-1)!$

c) Die Matrix $B_n = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei definiert durch $b_{ij} = ij$. Berechnen Sie $\det B_n$!

d) Für die Matrix $C_n = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ x & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Zeigen Sie: $\det C_n = \det C_{n-1} - x^2 \det C_{n-2}$

e) Interessenten können (zuhause) daraus folgern: $\det C_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^i \binom{n-i}{i} x^{2i}$

f) Welche Gleichung muß x erfüllen, damit die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind?

g) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Determinante ± 1 hat, sind sowohl a und b als auch c und d zueinander teilerfremd.

h) Finden Sie ganze Zahlen $a, \ldots, h$ mit $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & c \\ d & 5 \end{vmatrix} = 1$ und $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & g \\ h & 5 \end{vmatrix} = -1$!

i) *Richtig oder falsch:* Die ungeraden Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$ bilden eine Gruppe.

j) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 1, \quad 7x - 11y &= 2 \qquad (1) \\ 5x - 4y = 2, \quad 7x - 8y &= 2 \qquad (2) \end{aligned}$$

nach der CRAMERschen Regel!

k) Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ habe ganzzahlige Koeffizienten und rechte Seiten, und $\det A = 3$. Zeigen Sie: Jede Komponente des Lösungsvektors ist entweder ganzzahlig oder hat Nenner drei.

l) Was können Sie sagen, wenn $\det A = 6$ ist?

m) Die ganzzahlige 2×2-Matrix A habe Determinante drei. Was können Sie über die Einträge von A^{-1} sagen?