

### Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27./28. Mai 2002

a) Bestimmen Sie zur Matrix  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$  Dreiecksmatrizen L, R mit  $LA = R$ !

b) Schreiben Sie A als Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix!

c) Berechnen Sie  $A^{-1}$  mit Hilfe der Matrizen L und R!

d) Berechnen Sie  $\det A$ !

e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = a, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = b \quad \text{und} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = c$$

in Abhängigkeit von  $a, b, c \in \mathbb{R}$ !

f) Berechnen Sie in  $\mathbb{F}_2^3$  die Produkte  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gemäß den über  $\mathbb{R}$  hergeleiteten Ausdrücken in den Komponenten!

g) Drücken Sie die Fläche des Dreiecks  $\triangle ABC$  mit Ecken  $A, B, C \in \mathbb{R}^3$  aus durch die Vektoren  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$ !

h) Ein Polyeder habe vier Ecken  $A, B, C, D$ , d.h. es hat vier Seitenflächen, die allesamt Dreiecke sind. Berechnen Sie sein Volumen mit Hilfe eines geeigneten Spatprodukts!

*Hinweis:* Das Volumen einer Pyramide mit Grundfläche  $F$  und Höhe  $h$  ist  $\frac{1}{3}Fh$ .

i) Zeigen Sie: Das Polyeder mit den Ecken  $A = (a, 0, 0)$ ,  $B = (0, a, 0)$ ,  $C = (0, 0, a)$  und  $D = (a, a, a)$  ist ein Tetraeder, d.h. alle seine Kanten sind gleich lang.

j) Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders mittels der Formel aus h), und leiten Sie daraus eine Formel her für das Volumen eines Tetraeders mit Kantenlänge  $s$ !

k) Bestimmen Sie, ohne zu rechnen, den Wert der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} !$$

l) Was ist die inverse Permutation zu  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ?

m) Schreiben Sie  $\pi$  als Produkt von Transpositionen!

n) Ist  $\pi$  gerade oder ungerade?

o) Geben Sie die Permutationsmatrix  $A_\pi$  explizit an!

p)  $A_\pi$  sei die Permutationsmatrix zu einer allgemeinen Permutation  $\pi \in \mathfrak{S}_n$ . Was ist  $\det A_\pi$ ?

q) Zeigen Sie: Jede Permutation der Form  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ , die drei Zahlen zyklisch vertauscht, ist gerade.