WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17./21. Mai 2002

a) F_a bezeichne die Menge aller stetiger Funktionen, die an der Stelle Null den Wert $a \in \mathbb{R}$ annehmen. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist F_a ein Vektorraum?

b) Finden Sie für vorgegebenes $a \in \mathbb{R}$ einen Vektorraum V, so daß das Paar (F_a, V) ein affiner Raum ist!

c) Welche der folgenden Teilmengen von F_a sind affine Unterräume?

$$A_1 = \{f \in F_a \mid f(1) = 2\},\quad A_2 = \{f \in F_a \mid f(1) = f(2)\},\quad A_3 = \{f \in F_a \mid f(1) = f(2) + 1\},$$
$$A_4 = \{f \in F_a \mid f(1) = f(2)^2\},\qquad A_5 = \{f \in F_a \mid f(k\pi) = k\pi \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $AB = E$.

e) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $BA = E$.

f) Bestimmen Sie alle Matrizen X, für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 14 & 10 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$!

g) Berechnen Sie die inversen Matrizen von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$!

h) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

i) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1} !

j) Richtig oder falsch: Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar.

k) Richtig oder falsch: Für alle $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar.

l) Zeigen Sie: Falls für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ gilt $AB + BA = 0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.

m) Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$. Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\binom{1}{3}$ und $\binom{2}{7}$?

n) Zeigen Sie, daß die Tschebyscheff-Polynome

$$T_0 = 1,\quad T_1 = x,\quad T_2 = 2x^2 - 1 \quad\text{und}\quad T_3 = 4x^3 - 3x$$

eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen A, B für die gilt: Ist

$$\begin{matrix} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ = b_3T_3 + b_2T_2 + b_1T_1 + b_0T_0 \end{matrix}, \text{ so ist } \quad A\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } B\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} !$$