WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13./14. Mai 2002

a) Der Untervektorraum U von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ habe die Funktionen $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin 3t$ und $\cos 3t$ als Basis. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi\colon U \to U;\ f \mapsto \frac{df}{dt}$!

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis aus den drei Einheitsvektoren!

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\omega\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$!

d) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ die Produkte AB und BA!

e) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

f) Gilt diese Formel auch für $n = -1$?

g) Die $n \times n$-Matrix A habe nur Nullen und Einsen als Einträge. Finden Sie Schranken u_m und o_m, so daß für jeden Eintrag b der Matrix A^m gilt: $u_m \le b \le o_m$!

h) Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Welche Dimension hat das Bild der linearen Abbildung $\varphi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Abbildungsmatrix A_i ?

j) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$x - y - z + u = 0, \quad x + y - z = 0, \quad 3x + 2y - z - u = 0 \quad \text{und} \quad 2x + 3y - 2u = 0\,!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

k) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$2x - y + az = a, \quad 2ax + y - 2z = 0 \quad \text{und} \quad 2x + ay - 2z = 0\,!$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

l) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des zu diesem Gleichungssystem gehörenden homogenen Gleichungssystems! Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist dessen Lösungsmenge ein Vektorraum?