Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 29./30. April 2002

a) Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens n?

b) Welche Dimension hat der Vektorraum

$$W = \left\{ a\sin^2 t + b\cos^2 t + c \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ?$$

c) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3\,, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3\,,$$

$$M_3 = \left\{\sin t, t, t^2\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\,, \qquad M_4 = \left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,$$

$$M_5 = \left\{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\,, \qquad M_6 = \left\{e^t, \sinh t, \cosh t\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

d) Ergänzen Sie die Menge $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$!

e) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$!

f) Finden Sie eine Basis des Vektorraums $V = \left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; b = c \right\}$!

g) Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y-z\\ y+z-w\end{pmatrix}\ ?$$

h) V sei der von $\{\sin t, \cos t, \sin^2 t, \cos^2 t, \sin t\cos t\}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, und ψ sei die lineare Abbildung $V \to V$, die jedes $f \in V$ auf seine Ableitung nach t abbildet. Welche Dimension haben Kern und Bild von ψ?

i) Berechnen Sie die folgenden Summen in $\mathbb{F}_2^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$$

j) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^2 \\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix} \end{cases}$!