Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

19. Juli 2002

14. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Was ist das (dreidimensionale) Volumen von $Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 100,\ |z| \le 1\right\}$?

2) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y/(x^2+y^2)}{-x/(x^2+y^2)}$ hat eine Stammfunktion.

3) Richtig oder falsch: $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y| \ge 1\right\}$ ist einfach zusammenhängend.

4) Richtig oder falsch: Die Oberfläche einer Kugel ist einfach zusammenhängend.

5) Richtig oder falsch: Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 1: **(***5 Punkte***)**

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{x^2}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,0)$!

b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x,y) = \binom{x^2y}{xy^2}$ längs des Teilbogens des Einheitskreises, der den Punkt $(1,0)$ im Gegenuhrzeigersinn mit $(0,1)$ verbindet!

c) Ditto für den Uhrzeigersinn.

d) Ist eines der beiden Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$ konservativ?

Aufgabe 2: **(***5 Punkte***)**

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{-x}$ nach dem Satz von Green entlang des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$!

b) Berechnen Sie nach dem Satz von Gauss das Integral $\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}$ mit $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 = z,\ 0 \le z \le 1\right\}$!

Aufgabe 3: **(***5 Punkte***)**

Das Möbiusband kann als Flächenstück B dargestellt werden durch

$$f\colon D = [0,1] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} (2+u\cos v)\,\cos 2v \\ (2+u\cos v)\,\sin 2v \\ u\sin v \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Randkurve γ von B !

b) Berechnen Sie für $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V}\,ds$!

c) Berechnen Sie $\iint_B \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O} = \iint_D \operatorname{rot}\vec{V} \cdot (f_u \times f_v)\,du\,dv$!

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus *b)* und *c)* mit der Aussage des Satzes von Stokes!

KEINE ABGABE — FROHE FERIEN !