

12. Juli 2002

### 13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die Parametrisierung  $\gamma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$  macht die Kreislinie zu einem regulären Kurvenstück.
- 2) *Richtig oder falsch:* Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.
- 3) *Richtig oder falsch:* Falls ein Vektorfeld  $\vec{V}$  mit antisymmetrischer JACOBI-Matrix über der offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Stammfunktion hat, ist es dort konstant.
- 4) *Richtig oder falsch:* Falls für zwei Vektorfelder  $\vec{V}$  und  $\vec{W}$  auf  $U \subset \mathbb{R}^n$  und eine Kurve  $\gamma$  in  $U$  gilt  $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} \vec{W} \cdot d\vec{x}$ , so ist  $\vec{V}(x) = \vec{W}(x)$  für alle Kurvenpunkte  $x = \gamma(t)$ .
- 5) *Richtig oder falsch:* Ein Teilchen komme aus unendlicher Ferne entlang einer Kurve  $\gamma$  in die Nähe einer Punktladung, werde durch deren Feld  $\vec{E}$  abgelenkt und verschwinde wieder in unendliche Weiten. Dann ist  $\int_{\gamma} \vec{E} \cdot ds = 0$ .

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

- a) Ein Massenpunkt läuft im ebenen Kraftfeld  $\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  auf einem der beiden Bogen des Einheitskreises von  $(-1, 0)$  nach  $(0, 1)$ . Berechnen Sie die Arbeit  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{x}$  für die beiden Möglichkeiten!
- b) Ist das Kraftfeld aus a) konservativ?

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie für die Kurve  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto (t - \frac{\ell}{2}, 0, 0)$  das Integral  $\int_{\gamma} \frac{ds}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$  für einen festen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ , der nicht auf  $\gamma$  liegt.
- b) Wie verhält sich das Integral, wenn  $\mathbf{x}_0$  gegen einen Punkt auf  $\gamma$  geht?

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Bestimmen Sie für den Bereich  $B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$  die folgenden Integrale:

- a)  $\iint_B x \, dx \, dy$
- b)  $\iint_B xy \, dx \, dy$
- c)  $\iint_B \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} \, dx \, dy$
- d)  $\iint_B \sqrt{x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$

**Keine Abgabe – Abgegeben wird diese Woche nur die Klausur!**