WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

28. Juni 2002

11. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine um den Nullpunkt kugelsymmetrische Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ und ${}^t(x,y,z)$ in jedem Punkt linear abhängig.

2) Richtig oder falsch: Falls die stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ nur positive Werte annimmt, ist auch $\int_a^b f(x)\,dx$ positiv.

3) Richtig oder falsch: $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-1} = -\frac{3}{2}$.

4) Richtig oder falsch: Die Funktionen $g(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ und $h(x) = \int_a^x f(\xi+1)\,d\xi$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante.

5) Richtig oder falsch: Für die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ für alle $a > 0$. Dann ist f eine ungerade Funktion.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = xy$ auf der Kreisline $x^2+y^2=1$, indem Sie das Problem in Polarkoordinaten formulieren und dann die entstehende Extremwertaufgabe lösen.

b) In Polarkoordinaten ausgedrückt ist das Potential eines statischen Dipols, eingeschränkt auf eine Ebene, $U(r,\varphi) = \dfrac{p\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Berechnen Sie die Divergenz von $E = -\operatorname{grad} U$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = 2x-1$ explizit die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} \quad\text{und}\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\,!$$

b) Eine Schablone zum Zeichnen der Parabel $y = x^2$ habe eine Länge (= maximaler y-Wert) von 12 cm. Welche Fläche hat sie?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie anhand einer Approximation durch vier Rechtecke eine obere und eine untere Schranke für die Fläche unter der Kurve $y = 1/\sqrt{9-x^3}$ zwischen $x=0$ und $x=2$! *(Taschenrechnergenauigkeit)*

b) Beweisen Sie die KEPLERsche Faßregel: Für $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ist die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse zwischen den Koordinatenwerten $x = a$ und $x = b$ gleich $\frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ mit $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(\frac{a+b}{2})$ und $y_2 = f(b)$.

c) Gelegentlich wird diese Regel auch für beliebige Funktionen zur näherungsweisen Berechnung des Integrals eingesetzt. Schätzen Sie nach dieser Formel die in *a)* betrachtete Fläche!

Abgabe bis zum Freitag, dem 5. Juli 2002, um 12.00 Uhr