Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

21. Juni 2002

10. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die Jacobi-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

2) Richtig oder falsch: Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die Jacobi-Matrix von f symmetrisch.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine Taylor-Reihe darstellbar.

4) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!

5) $\vec{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld. Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}$?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie für zwei Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Divergenz von $\vec{V} \times \vec{W}$ auf möglichst kompakte Weise!

b) Das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; insbesondere ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Wenden Sie diese Formel an auf die „Vektoren“ $\vec{a} = \nabla, \vec{b} = \vec{V}$ und $\vec{c} = \vec{W}$, und vergleichen Sie mit *a)*!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div}\vec{V}$

b) $\operatorname{rot}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{V} + f \operatorname{rot}\vec{V}$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{V}) - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f_n\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\} \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n} \end{cases}$ für eine beliebige positive reelle Zahl n!

b) Was ist Δf_n ?

c) Zeigen Sie: $\Delta f_n \equiv 0 \iff n = \frac{1}{2}$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 28. Juni 2002, um 12.00 Uhr