Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, C201

31. Mai 2002

7. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in k^{n\times n}$ sei $A^3 = A$. Dann ist $\det A \in \{0, 1, -1\}$.

2) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

3) Richtig oder falsch: Ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen in n Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten hat eine ganzzahlige Lösung, falls die Determinante seiner Matrix gleich $+1$ oder -1 ist.

4) Richtig oder falsch: Eine ganzzahlige $n\times n$-Matrix mit Determinante ± 1 hat eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

5) Richtig oder falsch: Falls auch die inverse Matrix der ganzzahligen $n \times n$-Matrix A ganzzahlige Einträge hat, ist $\det A = \pm 1$.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$!

b) Berechnen Sie die Determinante der vom vorigen Übungsblatt her bekannten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

Berechnen Sie die $n\times n$-Determinanten $e_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ und $a_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 7. Juni 2002, um 12.00 Uhr