WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

5. Juni 2002

Lösungen zu Frage 2 und Aufgabe 2 des 6. Übungsblatts

2) Richtig oder falsch: Der Rang einer $n \times n$-Matrix A ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente der Matrix R aus ihrer LR-Zerlegung.

Falsch: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $L = E$ und $A = R$; A hat Rang zwei, aber es gibt nur einen von Null verschiedenen Diagonaleintrag.

Hier gab es anscheinend vielfach Probleme: Jede Eins in der Diagonalen sorgt zwar für einen neuen, linear unabhängigen Spaltenvektor, aber genau wie im obigen Beispiel können Spaltenvektoren existieren, bei denen sonstige Einträge auf die lineare Unabhängigkeit von gewissen anderen Spalten führen.

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix}$$

Hierzu müssen wir im Schema

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

versuchen, links eine obere Dreiecksmatrix zu erzeugen.

Addition der zweifachen ersten Zeile zur zweiten und Subtraktion der ersten Zeile von der dritten macht daraus

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2a & a-3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 & 0 & 0 & 0 & 1\,. \end{array}$$

Als nächstes addieren wir das zweifache der zweiten Zeile zur driten und subtrahieren ihr $(a+1)$-faches von der vierten; dies ergibt das Schema

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 & -3a-12 & -2a-2 & -a-1 & 0 & 1\,. \end{array}$$

Da $6+3-3^2=0$ verschwindet, ist 3 eine Nullstelle von $6+a-a^2$; das Produkt mit der anderen ist nach dem Wurzelsatz von VIÈTE gleich -6, d.h.

$$6+a-a^2=(a-3)(-a-2)\,.$$

Also addieren wir die $(a+2)$-fache dritte Zeile zur vierten und kommen so auf die Endgestalt

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 & a+4 & a+3 & a+2 & 1 \end{array}$$

Somit ist

$$R=\begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ a+4 & a+3 & a+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie, in Abhängigkeit von a und einer beliebigen rechten Seite, die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ durch möglichst einfache Formeln an!

Multiplikation mit L macht das Gleichungssystem zu

$$R\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=L\cdot\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix},$$

ausgeschrieben

$$\begin{aligned} (a-1)x+2y+3z+4w&=b \\ (a-2)y+3z+4w&=2b+c \\ (a-3)z+4w&=3b+2c+d \\ (a-4)w&=(a+4)b+(a+3)c+(a+2)d+e\,. \end{aligned}$$

Also ist für $a\neq 4$

$$w=\frac{(a+4)b+(a+3)c+(a+2)d+e}{a-4}\,.$$

Setzt man dies ein in die dritte Gleichung, folgt für $a\neq 3$

$$z=\frac{3b+2c+d-4w}{a-3}\,.$$

Entsprechend ist für $a\neq 2$

$$y=\frac{2b+c-3z-4w}{a-2}$$

und für $a\neq 1$

$$x=\frac{b-2y-3z-4w}{a-1}\,.$$

Für $a \notin \{1, 2, 3, 4\}$ haben wir somit die Lösung gefunden.

Für $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist das Gleichungssystem *im allgemeinen* unlösbar, da hier Gleichungen der Form $0 \cdot u = v$ auftreten, was nur für $v = 0$ lösbar ist und in diesem Fall keinerlei Bedingung an v stellt.

Für $a = 4$ ist also das Gleichungssystem unlösbar, falls

$$(a + 4)b + (a + 3)c + (a + 2)d + 2 \neq 0$$

ist; ist dieser Ausdruck gleich null, ist w beliebig und x, y, z ergeben sich aus den obigen Formeln.

Für $a = 3$ muß bei Lösbarkeit für das oben berechnete w gelten

$$4w = 3b + 2c + d\,;$$

dann ist z beliebig und x, y berechnen sich aus den obigen Formeln.

Für $a = 2$ lautet die Lösbarkeitsbedingung

$$3z + 4w = 2b + c\,,$$

wobei w und z nach obigen Formeln berechnet werden, y dann beliebig ist und für x wieder die angegebene Formel gilt.

Für $a = 1$ schließlich können w, z, y wie oben berechnet werden; falls dann

$$2y + 3z + 4w = b$$

ist, ist x beliebig; ansonsten ist das Gleichungssystem unlösbar.