

24. Mai 2002

6. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n \times n}$ ist $\iota((AB)^{-1}) = \iota(A^{-1})\iota(B^{-1})$.
- 2) *Richtig oder falsch:* Der Rang einer $n \times n$ -Matrix A ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente der Matrix R aus ihrer LR-Zerlegung.
- 3) Für welche Matrix P ist $P \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$?
- 4) *Richtig oder falsch:* Für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$.
- 5) *Richtig oder falsch:* Für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.
- 6) Berechnen Sie die Determinante der 10×10 -Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 10i + j$!

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!
- b) Schreiben Sie A als Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix} !$$

- b) Geben Sie, in Abhängigkeit von a und einer beliebigen rechten Seite, die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ durch möglichst einfache Formeln an!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2$
- b) Zeigen Sie, daß das Polyeder mit den acht Ecken $A = (4, 0, 8)$, $B = (4, 3, 8)$, $C = (5, 0, 7)$, $D = (6, 2, 10)$, $E = (2, 1, 6)$, $F = (3, 1, 5)$, $G = (3, 3, 9)$ und $H = (5, 2, 11)$ ein Parallelepiped ist, und berechnen Sie sein Volumen!

Abgabe bis zum Freitag, dem 31. Mai 2002, um 12.00 Uhr