Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

10. Mai 2002

4. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei A^2 die Nullmatrix. Dann ist auch A gleich der Nullmatrix.

3) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $A^2 = A$. Dann ist A entweder die Einheitsmatrix oder die Nullmatrix.

4) Richtig oder falsch: Wenn ein homogenes Gleichungssystem mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ eine nichttriviale rationale Lösung hat, hat es auch eine nichttriviale ganzzahlige Lösung.

5) (vier Zeilen, zwei Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(1-i)x + (1+i)y = 4$ und $ix - iy = -2$ über den komplexen Zahlen!

Aufgabe 1: (*4 Punkte*)
In einem Netzwerk aus n Rechnern gibt es zwischen gewissen Rechnern direkte (bidirektionale) Verbindungen; die Matrix A sei so definiert, daß der Eintrag $a_{ij} = 1$ ist, wenn dies für die Rechner i und j der Fall ist, und $a_{ij} = 0$ sonst. Die Diagonalelemente a_{ii} werden alle auf Eins gesetzt.

a) Welche Zahlen sind als Einträge b_{ij} der Matrix $B = A^2$ grundsätzlich möglich?

b) Was bedeuten die einzelnen Werte von b_{ij} für die Kommunikationsmöglichkeiten zwischen den Rechnern i und j?

c) Zeigen Sie: Genau dann kann jeder Rechner im Netzwerk mit jedem anderen kommunizieren, wenn die Matrix A^{n-1} keinen Eintrag Null enthält.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Sei $V = \left\{\alpha e^{-2t} + \beta e^{-t} + \gamma + \delta e^{t} + \varepsilon e^{2t} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}\right\}$

a) Bestimmen Sie eine Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V;\ f \mapsto \ddot{f} = \dfrac{d^2 f}{dt^2}$!

b) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild dieser Abbildung!

c) Zeigen Sie: Jedes Element $f \in V$ läßt sich auf genau eine Weise schreiben als $f = g + h$ mit $g \in \operatorname{Kern}\varphi$ und $h \in \operatorname{Bild}\varphi$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3w & + & ax & - & y & + & z & = & 2a \\ w & & & - & y & + & z & = & 1 \\ aw & - & x & - & ay & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 17. Mai 2002, um 12.00 Uhr