WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

26. April 2002

2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

1) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$.

2) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$.

3) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{B}$ sei eine Basis des Vektorraums V und $M \subset B$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{B}$. Dann ist M eine Basis von $[M]$.

4) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.

5) *Richtig oder falsch:* Sind U_1 und U_2 Untervektorräume von V, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von U_1 und $\mathcal{B}_2$ von U_2 derart, daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die beiden Vektoren $\vec u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind!

b) Finden Sie drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$[\vec u, \vec v] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\} !$$

c) Welche Bedingung müsen die drei Komponenten einen Vektors $\vec w \in \mathbb{R}^3$ erfüllen, damit $\{\vec u, \vec v, \vec w\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Welche Dimension hat der Vektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\} \le \mathbb{R}^3$?

b) Bestimmen Sie eine Basis von U!

c) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = \left[\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t, \cosh^2 t, e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}\right] \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) !$$

Zur Erinnerung: $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

b) Zeigen Sie: Das Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon U \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \mapsto \frac{df}{dt}$ liegt in U.

c) Bestimmen Sie eine Basis das Bilds von φ!

Abgabe bis zum Freitag, dem 3. Mai 2002, um 12.00 Uhr