Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

19. April 2002

1. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die leere Menge ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: Die Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen ist wieder linear.

3) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{x+y}{xy}$ ist linear.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ \binom{x}{y} \mapsto x+y+1$ ist linear.

5) Richtig oder falsch: Falls für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ die Hintereinanderausführung $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ist, ist φ entweder die Identität oder die Nullabbildung.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die reellen Polynome vom Grad höchstens vier bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Für welche $a_0 \in \mathbb{R}$ bilden die Polynome vom Grad höchstens vier mit konstantem Koeffizienten a_0 einen Untervektorraum?

c) Ist auch die Menge aller reeller Polynome vom Grad genau vier ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

d) Ist auch die Menge *aller* reeller Polynome ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \quad\mathbb{R}^3 \quad\to\quad \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+2y+\ \ z \\ 2x+3y+4z \end{pmatrix} \end{cases}$ ist linear.

b) Bestimmen Sie den Kern von φ!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: $V = \left\{ a\sin t + b\cos t \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto \dfrac{df}{dt} \end{cases}$ ist linear.

c) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} V \to \mathbb{R}^6 \\ f \mapsto \big(f(0), f(\pi), f(2\pi), f(3\pi), f(4\pi), f(5\pi)\big) \end{cases} \quad !$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 26. April 2002, um 12.00 Uhr