WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

19. Juli 2002

14. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Was ist das (dreidimensionale) Volumen von $Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 100,\ |z| \le 1\right\}$?

Lösung: Z ist ein Zylinder mit Grundkreisdurchmesser zehn und Höhe eins, hat also das Volumen $\pi r^2 h = 10\pi$.

2) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \binom{y/(x^2+y^2)}{-x/(x^2+y^2)}$ hat eine Stammfunktion.

Lösung: *Falsch,* denn die Ableitung der ersten Komponente nach y ist $2xy/(x^2 + y^2)^2$, die der zweiten nach x aber das Negative davon. (Falls es eine Stammfunktion F gäbe, müßte beides gleich F_{xy} sein.)

3) Richtig oder falsch: $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \ge 1\right\}$ ist einfach zusammenhängend.

Lösung: *Falsch:* Das ist das Äußere einer Kreisscheibe, im Innern gibt es also ein Loch. Besser ausgedrückt: Ein Kreis, der außen um die Einheitskreisscheibe herumführt, läßt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen.

4) Richtig oder falsch: Die Oberfläche einer Kugel ist einfach zusammenhängend.

Lösung: *Richtig,* denn dort hat jede geschlossene Kurve eine Innenfläche, in der sie sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

5) Richtig oder falsch: Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.

Lösung: *Falsch,* beispielsweise lassen sich die Kreise, die durch einen Querschnitt durch den Schlauch definiert sind, nicht zusammenziehen. (Die Kreise entlang des Schlauchs auch nicht.)

Aufgabe 1: **(***5 Punkte***)**

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \binom{y^2}{x^2}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 0)$!

Lösung: Zunächst müssen wir die drei Seiten des Dreiecks Δ als Kurvenstücke darstellen und die Tangentenvektoren dieser Kurvenstücke bestimmen:

$$\gamma_1 \colon \begin{cases} [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (1, t) \end{cases} \qquad \text{führt von } (1, 0) \text{ nach } (1, 1)\,, \qquad \dot\gamma_1(t) = \binom{0}{1}$$

$$\gamma_2\colon \begin{cases} [0,\,1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (1-t, 1-t) \end{cases} \qquad \text{führt von } (1,1) \text{ nach } (0,0)\,, \qquad \dot\gamma_2(t) = \binom{-1}{-1}$$

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,\,1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t, 0) \end{cases} \qquad \text{führt von } (0,0) \text{ nach } (1,0)\,, \qquad \dot\gamma_3(t) = \binom{1}{0}$$

Damit ist

$$\int_{\gamma_1} \vec V(x,y)\,ds = \int_0^1 \vec V\big(\gamma_1(t)\big)\dot\gamma_1(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 dt = 1\,,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec V(x,y)\,ds = \int_0^1 \vec V\big(\gamma_2(t)\big)\dot\gamma_2(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = -2\int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac{2}{3}(1-t)^3\,\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\,,$$

$$\int_{\gamma_3} \vec V(x,y)\,ds = \int_0^3 \vec V\big(\gamma_3(t)\big)\dot\gamma_3(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0\,dt = 0\,,$$

und

$$\int_{\Delta} \vec V(x,y)\,ds = \int_{\gamma_1} \vec V(x,y)\,ds + \int_{\gamma_2} \vec V(x,y)\,ds + \int_{\gamma_3} \vec V(x,y)\,ds = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec W(x,y) = \binom{x^2y}{xy^2}$ längs des Teilbogens des Einheitskreises, der den Punkt $(1,0)$ im Gegenuhrzeigersinn mit $(0,1)$ verbindet!

Lösung: Die übliche Parametrisierung $\gamma(t) = \big(\cos t,\, \sin t\big)$ des Einheitskreises durchläuft diesen im mathematisch positiven Sinn, dem Gegenuhrzeigersinn also; um vom Punkt $(1,0)$ zu $(0,1)$ zu kommen, müssen wir das Parameterintervall von 0 bis $\pi/2$ betrachten. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec W(x,y)\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec W(\cos t, \sin t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 t\, \sin t \\ \cos t\, \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t\, \sin^2 t + \cos^2 t\, \sin^2 t)\,dt = 0\,.\end{aligned}$$

c) *Ditto* für den Uhrzeigersinn.

Lösung: Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen können wir den Kreisbogen im Uhrzeigersinn durchlaufen, indem wir einfach den Parameter t durch $-t$ ersetzen. Wir betrachten also das Kurvenstück

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit Tangentenvektor} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $(1,0)$ gehört zum Parameterwert null, und für $t = 3\pi/2$ erhalten wir den

Punkt $(0,1)$; daher ist

$$\int_\gamma \vec{W}(x,y)\,ds = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \vec{W}(\cos t, -\sin t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix}-\cos^2 t\,\sin t\\ \cos t\,\sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t\,\sin^2 t - \cos^2 t\,\sin^2 t)\,dt = 0\,.$$

(Kürzere Lösung: Da $\vec{W}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)$, wie gerade zweimal nachgerechnet, gleich null ist, verschwindet das Linienintegral über jeden Teilbogen von γ.)

d) Ist eines der beiden Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$ konservativ?

Lösung: $\vec{V}$ ist nicht konservativ, da das Integral längs des (geschlossenen) Dreiecks Δ nicht verschwindet.
Für $\vec{W}$ haben die beiden Integrale aus *b)* und *c)* denselben Wert, $\vec{W}$ ist aber trotzdem nicht konservativ, denn gäbe es eine Stammfunktion Φ, so wären $\Phi_x = x^2y$ und $\Phi_y = xy^2$ die beiden Komponenten von $\vec{W}$; da diese stetig differenzierbar sind, müßte nach dem Lemma von Schwarz

$$x^2 = \frac{\partial}{\partial y}\Phi_x = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_y = y^2$$

sein, was offensichtlich für die meisten Punkte falsch ist.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{-x}$ nach dem Satz von Green entlang des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$!

Lösung: Nach dem Satz von Green ist für ein ebenes Gebiet B mit Randkurve γ

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Hier ist

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 \quad\text{und}\quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} = -2y\,,$$

wir müssen also $-(2y+1)$ über die Fläche des Dreiecks Δ mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ integrieren. Dieses Dreieck ist ein Fundamentalbereich sowohl vom Typ I als auch vom Typ II; wir können es etwa darstellen als

$$\Delta = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 1 \text{ und } 0\le y\le 1-x\right\}.$$

Damit ist

$$\iint_\Delta -(2y+1)\,dx\,dy = -\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(2y+1)\,dy\right)dx = -\int_0^1 (y^2+y)\Big|_0^{1-x}\,dx$$

$$= -\int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2 = -\frac{5}{6}\,,$$

und das ist nach dem Satz von GREEN auch gleich dem gesuchten Integral.

b) Berechnen Sie nach dem Satz von GAUSS das Integral $\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}$ mit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z,\ 0 \le z \le 1\}$!

Lösung: S ist der Mantel eines Kegels mit Spitze im Nullpunkt; nach dem Satz von GAUSS gilt für den zugehörigen Vollkegel $\mathcal{K}$

$$\iint\limits_O \vec{W}\, d\vec{O} = \iiint\limits_{\mathcal{K}} \operatorname{div} \vec{W}\, dx\, dy\, dz\,,$$

wobei der Rand $O = S \cup D$ von $\mathcal{K}$ aus dem Mantel S und einer Kreisscheibe D besteht. Die Divergenz des Integranden ist

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} = y + z\,,$$

also ist

$$\iint\limits_O \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \iiint\limits_{\mathcal{K}} (y+z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Bezeichnen wir für festgehaltenes z mit $D_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z\}$ den Schnitt durch $\mathcal{K}$ auf Höhe z, so ist

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}} (y+z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^1 \left(\iint\limits_{D_z} (y+z)\, dx\, dy \right) dz = \int\limits_0^1 \left(\iint\limits_{D_z} y\, dx\, dy + \iint\limits_{D_z} z\, dx\, dy \right) dz\,.$$

Da die Kreisscheibe D_z spiegelsymmetrisch zur (x,z)-Ebene ist, verschwindet das Integral über y. Der zweite Integrand z ist konstant auf D_z, das Integral ist also gleich z mal der Fläche von D_z, d.h. πz^3. Somit ist

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}} (y+z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^1 \pi z^3\, dz = \frac{\pi}{4}\,.$$

Nach dem Satz von GAUSS ist das gleich

$$\iint\limits_O \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \iint\limits_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} + \iint\limits_{D_1} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}\,;$$

um daraus das Oberflächenintegral über S zu bestimmen, müssen wir also noch das über D_1 berechnen.

Der Normalenvektor auf D_1 zeigt in Richtung der posititven z-Achse, denn zur Anwendung des Satzes von GAUSS müssen die Normalenvektoren auf dem Rand nach außen zeigen. Eine mögliche Darstellung von D_1 als Flächenstück ist die Parametrisierung

$$f\colon \begin{cases} [0,1] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1) \end{cases};$$

da

$$f_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\quad f_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_r(r,\varphi) \times f_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

ist, liefert das die richtige Orientierung, und wegen

$$\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = rx$$

ist

$$\iint_{D_1} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot r \cos\varphi \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^2(\sin 2\pi - \sin 0) \, dr = 0 \, .$$

(Das kann man auch ohne Rechnung durch Symmetriebetrachtungen sehen.) Damit ist

$$\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \iiint_{\mathcal{K}} (y+z) \, dx \, dy \, dz - \iint_{D_1} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \frac{\pi}{4} \, .$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Das MÖBIUSband kann als Flächenstück B dargestellt werden durch

$$f\colon D = [0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + u\cos v) \cos 2v \\ (2 + u\cos v) \sin 2v \\ u \sin v \end{pmatrix} \, .$$

a) Bestimmen Sie die Randkurve γ von B !

Lösung: Kandidaten für Randpunkte sind die Punkte mit Parameterwerten am Rande des Definitionsbereichs, wobei wegen der Periodizität der Funktionen, in denen v auftritt, nur die Punkte mit u-Werten am Rand des Parameterintervalls interessant sind: Für festes u und variables v ergeben sich geschlossene Kurven.
Für festgehaltenes v und variables u erhalten wir die Strecke von

$$f(0, v) = (2\cos 2v, 2\sin 2v, 0) \quad \text{nach} \quad f(1, v) = \big((2 + \cos v)\cos 2v, (2 + \cos v)\sin 2v, \sin v\big) \, .$$

Der Anfangspunkt $(2\cos 2v, 2\sin 2v, 0)$ hängt nur ab von v modulo π, ist also für die Parameterwerte v und $v+\pi$ gleich. Beim Endpunkt ändert sich in der obigen Darstellung das Vorzeichen aller trigonometrischer Funktionen mit Argument v, während die Funktionen mit Argument $2v$ unverändert bleiben, d.h.

$$f(1, v + \pi) = \big((2 - \cos v)\cos 2v, (2 - \cos v)\sin 2v, -\sin v\big) \, .$$

Daran sieht man, daß die Punkte $f(1, v)$, $f(0, v)$ und $f(1, v + \pi)$ auf einer Geraden liegen, d.h. die Punkte der Form $f(0, v)$ sind keine Randpunkte, sondern bilden im Gegenteil die Mittellinie des MÖBIUSbands. Die Randkurve ist also

$$\gamma\colon \begin{cases} [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \big((2 + \cos t)\cos 2v, (2 + \cos t)\sin 2t, \sin t\big) \end{cases} .$$

(Das MÖBIUSband sowie die hier aufgetretenen Linien sind in einem Maple *worksheet* zu sehen, das über die *home page* der Vorlesung zugänglich ist.)

b) Berechnen Sie für $\vec{V}(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V} \, ds$!

Lösung: Im Punkt $\gamma(t)$ ist

$$x^2 + y^2 = (2 + \cos t)^2(\cos^2 2t + \sin^2 2t) = (2 + \cos t)^2\,;$$

somit ist

$$\vec{V}\big(\gamma(t)\big) = \frac{1}{2 + \cos t}\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Tangentenvektor an die Randkurve ist

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2(2 + \cos t)\sin 2t + (2 - \sin t)\cos 2t \\ 2(2 + \cos t)\cos 2t + (2 - \sin t)\sin 2t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

sein Produkt mit dem Vektorfeld also

$$\vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t) =$$
$$\frac{\big(-2(2 + \cos t)\sin 2t + (2 - \sin t)\cos 2t\big)(-\sin 2t) + \big(2(2 + \cos t)\cos 2t + (2 - \sin t)\sin 2t\big)\cos 2t}{2 + \cos t}$$
$$= \frac{2(2 + \cos t)\sin^2 2t + 2(2 + \cos t)\cos^2 2t}{2 + \cos t} = \frac{2(2 + \cos t)}{2 + \cos t} = 2\,.$$

Also ist

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi\,.$$

c) Berechnen Sie $\iint_B \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O} = \iint_D \operatorname{rot}\vec{V} \cdot (f_u \times f_v)\,du\,dv$!

Lösung: Da sowohl die dritte Komponente von $\vec{V}$ als auch die Ableitungen sämtlicher Komponenten nach der dritten Variablen z verschwinden, sind die ersten beiden Einträge von $\operatorname{rot}\vec{V}$ null. Der dritte Eintrag ist

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0\,.$$

Also ist die Rotation von $\vec{V}$ im gesamten Definitionsbereich von $\vec{V}$ gleich dem Nullvektor; das gesuchte Integral verschwindet also.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus *b)* und *c)* mit der Aussage des Satzes von STOKES!

Lösung: Wenn der Satz von STOKES auf das MÖBIUSband anwendbar wären, müßten die beiden Integrale aus *b)* und aus *c)* den gleichen Wert haben, was hier offensichtlich nicht der Fall ist.
Der Satz von STOKES ist nicht anwendbar, da das MÖBIUSband nicht orientierbar ist.

WEITERHIN FROHE FERIEN !