Lösung von Aufgabe 3

b) Die Elemente der Basis $\mathcal{B}_1$ lassen sich über den Binomischen Lehrsatz gemäß

$$(x+1)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j , \qquad i = 0, \dots, i .$$

durch die der Basis $\mathcal{B}_0$ ausdrücken. Bei der Aufstellung der zugehörigen Matrix müssen wir etwas aufpassen, da hier i und j ab Null laufen, wohingegen Matrixeinträge Indizes ab Eins haben. Setzen wir

$$\mathcal{B}_0 = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n+1}\} \text{ mit } \vec{b}_i = x^{i-1} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_1 = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_{n+1}\} \text{ mit } \vec{c}_i = (x+1)^{i-1} ,$$

so ist

$$\vec{c}_i = \sum_{j=1}^{n+1} m_{ij} \vec{b}_j \quad \text{mit} \quad m_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & \text{für } j \le i \\ 0 & \text{für } j > i \end{cases} .$$

Aus der Matrix $M = (m_{ij})$ erhält man laut Vorlesung die Matrix A des Basiswechsels von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_1$ als $A = {}^t\!M^{-1}$.

Die Matrix $N = M^{-1}$ könnte man natürlich nach GAUSS berechnen; man könnte dies auch nur für einige kleine Werte von n tun (z.B. für $n = 3$, was ohnehin für *a)* gebraucht wird), und dann eine erratene Formel durch vollständige Induktion beweisen, aber am einfachsten erhalten wir $N = (n_{ij})$, wenn wir daran denken, daß diese Matrix die Vektoren $\vec{b}_i$ durch die $\vec{c}_j$ ausdrückt:

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n+1} n_{ij} \vec{c}_j , \text{ d.h. } \quad n_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{i-1}{j-1} & \text{für } j \le i \\ 0 & \text{für } j > i \end{cases} ,$$

denn nach dem Binomischen Lehrsatz ist

$$x^i = \big((x+1) + (-1)\big)^i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (x+1)^j .$$

Also ist

$$A = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j}\binom{j-1}{i-1} & \text{für } i \le j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases} .$$

Die Matrix B des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_0$ ist $B = {}^t\!\left(N^{-1}\right) = {}^t\!M$; sie hat somit die Einträge

$$b_{ij} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{für } i \le j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases} .$$

a) Hier müssen wir nur einsetzen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zur Probe und Beruhigung kann man noch nachrechnen, daß beispielsweise

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c-d \\ b-2c+3d \\ c-3d \\ d \end{pmatrix}$$

ist und

$$(a-b+c-d) + (b-2c+3d)(x+1) + (c-3d)(x+1)^2 + d(x+1)^3 = a + bx + cx^2 + dx^3 .$$