WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

13. Juli 2002

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede injektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist surjektiv.

Lösung: *Richtig* für *lineare* Abbildungen (die eigentlich gemeint waren), denn φ ist injektiv genau dann, wenn $\dim \operatorname{Kern} \varphi = 0$ ist, surjektiv, wenn $\dim \operatorname{Bild} \varphi = n$ ist, und $\dim \operatorname{Kern} \varphi = n - \dim \operatorname{Bild} \varphi$ nach der Dimensionsformel. *Falsch* für beliebige Abbildungen, z.B. für die Abbildung $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\arctan x_1, \ldots, \arctan x_n)$.

2) Finden Sie eine Basis des Vektorraums aller Polynome vom Grad höchstens drei, die nur aus kubischen Polynomen besteht!

Lösung: Da $1, x, x^2, x^3$ eine Basis bilden, gilt dasselbe für $x^3 + 1, x^3 + x, x^3 + x^2$ und x^3.

3) Was ist $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$?

Lösung: Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge, hier also $5! = 120$.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4 \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist linear.

Lösung: *Falsch:* Für $\alpha \in \mathbb{F}_4 \setminus \mathbb{F}_2$ ist $\alpha^2 = \alpha + 1 \neq \alpha$, also $\varphi(\alpha \cdot 1) \neq \alpha\varphi(1)$.

5) Richtig oder falsch: Für das Vektorfeld $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $V(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ sei überall $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ und $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$. Dann ist $\Delta u(x,y) \equiv 0$.

Lösung: *Richtig,* denn $\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$, und durch Differentiation der angegebenen Formeln folgt $u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y)$ und $u_{yy}(x,y) = -v_{xy}(x,y)$. Nach dem SCHWARZschen Lemma verschwindet die Summe.

6) Richtig oder falsch: Jedes konstante Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ läßt sich als Gradient einer skalaren Funktion schreiben.

Lösung: *Richtig;* $\operatorname{grad}(ax + by + cz) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

7) Richtig oder falsch: Die Rotation eines Vektorfelds auf $\mathbb{R}^3$ verschwindet genau dann, wenn seine JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

Lösung: *Richtig,* denn die Komponenten der Rotation sind (bis auf Vorzeichen und einen Faktor zwei) gerade die Einträge des antisymmetrischen Anteils der JACOBI-Matrix.

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*
Der Vektorraum $V \le \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei erzeugt von den Funktionen

$$\sinh x,\ \sinh 2x,\ \cosh x,\ \cosh 2x,\ e^{-2x},\ e^{-x},\ e^{x},\ e^{2x},$$

und $W \le \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei der kleinste Vektorraum, der sowohl V als auch die konstanten Funktionen enthält.

a) Finden Sie Basen von V und von W!

Lösung: Da $\cosh x$ und $\sinh x$ Linearkombinationen von e^x und e^{-x} sind, sind auch $\cosh 2x$ und $\sinh 2x$ Linearkombinationen von e^{2x} und e^{-2x}, die Hyperbelfunktionen werden also zur Erzeugung nicht benötigt. Für W wird allerdings noch die konstante Funktion 1 benötigt.
Die Funktionen e^{-2x}, e^{-x}, 1, e^x, e^{2x} sind linear unabhängig, denn ist

$$\lambda e^{-2x} + \mu e^{-x} + \nu \cdot 1 + \rho e^{x} + \sigma e^{2x} = 0$$

für alle x, so muß auch die mit e^{2x} multiplizierte Gleichung

$$\lambda + \mu e^{x} + \nu e^{2x} + \rho e^{3x} + \sigma e^{4x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, d.h. das Polynom

$$P(z) = \sigma z^4 + \rho z^3 + \nu z^2 + \mu z + \lambda$$

muß für alle Werte $z = e^x$ oder, anders ausgedrückt, für alle positiven reellen Zahlen verschwinden. Das einzige Polynom mit dieser Eigenschaft ist aber das Nullpolynom, d.h. $\lambda = \mu = \nu = \rho = \sigma = 0$. Somit bilden die vier Funktionen

$$e^{-2x}, \quad e^{-x}, \quad e^{x} \quad \text{und} \quad e^{2x}$$

eine Basis von V, und die fünf Funktionen

$$e^{-2x}, \quad e^{-x}, \quad 1, \quad e^{x}, \quad e^{2x}$$

eine von W.

b) Zeigen Sie: Die Vorschriften

$$\varphi(f) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \psi(f) = f'$$

definieren lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to V$.

Lösung: Zunächst definiert φ eine Abbildung von V nach $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denn Stammfunktionen von stetigen Funktionen sind stetig differenzierbar. Da sowohl konstante Funktionen als auch die angegebenen Erzeugenden stetig differenzierbar sind, definiert auch ψ eine Abbildung von W nach $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Beide Abbildung sind linear: Von der Differentiation ψ wissen wir das bereits, und von der Integration eigentlich auch: Für zwei beliebige Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und zwei reelle Zahlen λ, μ ist

$$\int_0^x \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_0^x f(x)\,dx + \mu \int_0^x g(x)\,dx\,.$$

Um zu zeigen, daß φ den Vektorraum V nach W abbildet, reicht es, die Basisfunktionen zu betrachten; denn wir wissen bereits, daß φ linear ist. Für $\alpha = \pm 1$ und $\alpha = \pm 2$ liegt

$$\varphi(e^{\alpha t}) = \int_0^x e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha} \cdot 1$$

in W, also auch das gesamte Bild von φ. Genauso folgt aus der auch für $\alpha = 0$ gültigen Formel

$$\psi(e^{\alpha t}) = \frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}\,,$$

daß das Bild von ψ in V liegt.

c) Warum ist die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi \colon V \to V$ die Identität?

Lösung: Das ist gerade der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\varphi(f)$ ist eine Stammfunktion von f, und deren Ableitung ist gleich f.

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ?

Lösung: Ist $\varphi(f) = 0$, so verschwindet erst recht f als Ableitung von $\varphi(f)$ identisch, d.h. der Kern von φ ist der Nullvektorraum, der auch die Dimension null hat. Nach der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Kern} \varphi$ ist also das Bild vierdimensional.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basen!

Lösung: Die Basisvektoren seien jeweils so angeordnet, wie oben in *a)*. Da in den Spalten der Abbildungsmatrix die Bilder der Basisvektoren stehen, ist die Abbildungsmatrix nach obiger expliziter Formel für $\varphi(e^{\alpha x})$ gleich

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcll}
aw + x + 2y + z &=& a+2 & (1)\\
-aw + x - 4y + z &=& a-2 & (2)\\
-aw + 2x + (2a-1)y + 5z &=& 2a+4 & (3)\\
-3aw - 5x + 2ay + az &=& 4-3a & (4)
\end{array}$$

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzen drei Gleichungen addieren wir (1) zu (2) und zu (3), sowie das Dreifache von (1) zu (4):

$$\begin{array}{rcll}
2x - 2y + 2z &=& 2a & (7)\\
x - y + z &=& a & (7')\\
3x + (2a+1)y + 6z &=& 3a+6 & (8)\\
-2x + (2a+6)y + (a+3)z &=& 10 & (9)
\end{array}$$

(Gleichung (7′) ist die der Übersichtlichkeit halber durch zwei dividierte Gleichung (7).)

Als nächstes soll y aus den Gleichungen (8) und (9) eliminiert werden; dazu subtrahieren wir dreimal Gleichung (7′) von (8) und addieren ihr Doppeltes, also Gleichung (7), zu Gleichung (9):

$$\begin{aligned} (2a+4)y + \quad\quad 3z &= 6 && (10)\\ (2a+4)y + (a+5)z &= 2a+10 && (11) \end{aligned}$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen voneinander liefert die Gleichung

$$(a+2)z = (2a+4)$$

Für $a \neq -2$ können wir kürzen und erhalten $z = 2$; für $a = -2$ haben wir die Gleichung $0 \cdot z = 0$, aus der nichts folgt.
Für $a \neq -2$ können wir $z = 2$ in Gleichung (10) einsetzen und erhalten

$$(a+2)y + 3 \cdot 2 = 6, \quad \text{also} \quad y = 0\,,$$

denn für $a \neq -2$ ist $a + 2 \neq 0$.
Gleichung (7′) wird nach Einsetzen von $z = 2$ und $y = 0$ zu

$$x + 2 = a \quad \text{oder} \quad x = a - 2\,.$$

Das müssen wir nun nur noch in Gleichung (1) einsetzen:

$$aw + (a-2) + 0 + 2 = a + 2 \Longleftrightarrow aw = 2\,.$$

Für $a \neq 0$ folgt daraus $w = \dfrac{2}{a}$; für $a = 0$ ist das Gleichungssystem unlösbar.
Fehlt noch der Fall $a = -2$. Dann wird Gleichung (10) zu

$$0y + 3z = 6, \qquad \text{d.h.} \quad z = 2 \quad \text{und} \quad y = \lambda \in \mathbb{R} \ \text{beliebig.}$$

Einsetzen in Gleichung (7') zeigt, daß

$$x - \lambda + 2 = a = -2 \quad \text{oder} \quad x = \lambda - 4$$

ist, woraus nach Gleichung (1) folgt, daß

$$-2w + (\lambda - 4) + 2\lambda + 2 = 4 \quad \text{oder} \quad w = \frac{3}{2}\lambda - 1\,.$$

Insgesamt ist also $\mathcal{L}_a = \begin{cases} \{(\frac{2}{a}, a-2, 0, 2)\} & \text{für } a \neq 0 \text{ und } a \neq -2 \\ \{(\frac{3}{2}\lambda - 1, \lambda - 4, \lambda, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{für } a = -2 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ i-2 \\ 3-i \\ 1-i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach Gram-Schmidt eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$, den zweiten setzen wir an als $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$$

ist. Hier ist

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = |1+i|^2 + 1 + |1-i|^2 + 4 = 2 + 1 + 2 + 4 = 9$$

und

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = i \cdot (1-i) + (i-2) \cdot (-1) + (3-i) \cdot (1+i) + (1-i) \cdot 2 = i + 1 - i + 2 + 4 + 2i + 2 - 2i = 9\,,$$

also ist $\lambda = -1$ und $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i-2 \\ 3-i \\ 1-i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i-1 \\ 2 \\ -1-i \end{pmatrix}$.

$\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ müssen noch auf Länge eins normiert werden: Wir wissen bereits, daß $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$ die Länge $\sqrt{9} = 3$ hat, und da

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = 1 + |i-1|^2 + 4 + |-1-i|^2 = 1 + 2 + 4 + 2 = 9$$

ist, gilt dasselbe für $\vec{b}_2$. Als Elemente einer Ortho**normal**basis können wir also die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ i-1 \\ 2 \\ -1-i \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

nehmen.

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie: Für zwei differenzierbare Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{grad}(\vec{V} \cdot \vec{W}) = \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \operatorname{grad} W_i + \sum_{i=1}^{n} W_i \cdot \operatorname{grad} V_i\,,$$

wobei $V_1, \dots V_n$ und $W_1, \dots, W_n$ die Komponenten von $\vec{V}$ und $\vec{W}$ sind.

Lösung: $\vec{V} \cdot \vec{W} = \sum\limits_{i=1}^{n} V_i W_i$, und die j-te Komponente von $\operatorname{grad}(\vec{V} \cdot \vec{W})$ ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} V_i W_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} W_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\,.$$

Genau das ist aber auch die j-te Komponente der rechten Seite.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome fünften Grades

a) für $f(x) = e^x$ um den Punkt $x = 1$

Lösung: Gesucht ist das Polynom $T_5(h)$, für das $e^{1+h} = T_5(h) + o(h^5)$ ist; zu seiner Berechnung kann man entweder $1+h$ in die „übliche“ TAYLOR-Reihe der Exponentialfunktion um den Nullpunkt einsetzen oder (hier deutlich schneller) direkt mit der TAYLORschen Formel arbeiten:

$$T_5(h) = \sum_{i=0}^{5} \frac{f^{(i)}(1)}{i!} h^i = \sum_{i=0}^{5} \frac{e}{i!} h^i\,.$$

(Da $e^{1+h} = e \cdot e^h$ ist, hätte man das natürlich auch ohne Rechnung sehen können.)

b) für $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten; laut Analysis I ist

$$\cos z = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{z^{2i}}{(2i)!}, \qquad \text{also } \cos(x^2+y^2) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(x^2+y^2)^{2i}}{(2i)!}.$$

Uns interessieren nur Terme vom Grad höchstens fünf; da bereits in $(x^2+y^2)^4$ alle Terme Grad acht haben, ist das gesuchte Polynom

$$T_5(x,y) = 1 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 - x^2y^2.$$

c) für $f(x,y,z) = e^{x^2+y^3+z^4}$ um den Punkt $(x,y,z) = (0,0,0)$

Lösung: Auch das geht am schnellsten durch Einsetzen:

$$e^u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}, \quad \text{d.h.} \quad e^{x^2+y^3+z^4} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x^2+y^3+z^4)^i}{i!}.$$

Bereits in der dritten Potenz von $(x^2+y^3+z^4)$ stehen nur Terme vom Grad mindestens sechs, und auch in

$$(x^2+y^3+z^4)^2 = x^4 + 2x^2y^3 + y^6 + 2x^2z^4 + 2y^3z^4 + z^8$$

haben nur die ersten beiden Summanden Grad kleiner oder gleich fünf. Damit ist

$$T_5(x,y,z) = 1 + x^2 + y^3 + z^4 + \frac{1}{2}x^4 + x^2y^3.$$

Aufgabe 6: *(9 Punkte)*
Berechnen Sie, soweit möglich, die folgenden Integrale oder (falls sinnvoll) deren CAUCHYschen Hauptwert:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, *b)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, *c)* $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^3}$, *d)* $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^4}$, *e)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, *f)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

Lösung:

a) $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a - \ln 1 = \ln a$; da der Logarithmus für $a \to \infty$ gegen Unendlich geht, existiert weder das Integral noch ein CAUCHYscher Hauptwert.

b) $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{a} - \frac{-1}{1} = 1 - \frac{1}{a}$; der Grenzwert für $a \to \infty$ ist eins, und das ist auch der Wert des Integrals.

c) Dieses Integral ist uneigentlich an der Stelle $x = 0$; zu untersuchen ist der Grenzwert von

$$\int_{-2}^{-\delta} \frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} = \left.\frac{-1}{2x^2}\right|_{-1}^{-\delta} + \left.\frac{-1}{2x^2}\right|_{\varepsilon}^{2} = \frac{-1}{2\delta^2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2\delta^2},$$

wenn die positiven Zahlen δ, ε unabhängig voneinander gegen null gehen. Dieser Grenzwert existiert offensichtlich nicht.

Für den CAUCHYschen Hauptwert müssen wir untersuchen, was passiert, wenn $\varepsilon = \delta$ ist; in diesem Fall ist obige Summe gleich $-3/8$, unabhängig von ε, und damit ist das auch der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ und der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals.

d) Auch dieses Integral ist uneigentlich wegen der Polstelle bei $x = 0$;

$$\int_{-2}^{-\delta} \frac{dx}{x^4} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^4} = \frac{-1}{3x^3}\bigg|_{-1}^{-\delta} + \frac{-1}{3x^3}\bigg|_{\varepsilon}^{2} = \frac{1}{3\delta^3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\varepsilon^3} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{3\varepsilon^3} + \frac{1}{3\delta^3}\,.$$

Dieser Ausdruck geht stets gegen unendlich, egal ob die positiven Zahlen ε und δ unabhängig voneinander oder im Gleichschritt gegen null gehen; hier existiert also weder das Integral noch der CAUCHYsche Hauptwert.

e) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh}(a) - \operatorname{arsinh}(0) = \operatorname{arsinh}(a)$, und das geht für $a \to \infty$ gegen unendlich, da auch $\lim\limits_{x\to\infty} \sinh x = \infty$ ist. Das Integral existiert also nicht.

f) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(a) - \arctan(0) = \arctan(a)$, und das geht für $a \to \infty$ gegen $\pi/2$, da bekanntlich $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ bei $x = \dfrac{\pi}{2}$ seine erste Polstelle hat. Also ist $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Das Kurvenstück γ sei gegeben durch $\gamma\colon \begin{cases} [0, 100\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \big(2\cos 2t,\ 2\sin 2t,\ 3t\big) \end{cases}$.

a) Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch!

Lösung: Es handelt sich um eine zylindrische Spirale vom Radius zwei, die hundert Windungen hat und eine Höhe von 300π.

b) Welche Bogenlänge hat γ?

Lösung: Der Tangentenvektor an γ im Punkt $\gamma(t)$ ist $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -4\sin 2t \\ 4\cos 2t \\ 3 \end{pmatrix}$; sein Skalarprodukt mit sich selbst ist

$$\dot\gamma(t)\cdot\dot\gamma(t) = 16\sin^2 2t + 16\cos^2 2t + 9 = 16 + 9 = 25\,,$$

er hat also in jedem Punkt die Länge fünf. Die Gesamtlänge der Spirale ist somit

$$\int_0^{100\pi} 5\,dt = 500\pi\,.$$