WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

13. Juli 2002

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede injektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist surjektiv.

2) Finden Sie eine Basis des Vektorraums aller Polynome vom Grad höchstens drei, die nur aus kubischen Polynomen besteht!

3) Was ist $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$?

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4 \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ ist linear.

5) Richtig oder falsch: Für das Vektorfeld $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $V(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ sei überall $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ und $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$. Dann ist $\Delta u(x,y) \equiv 0$.

6) Richtig oder falsch: Jedes konstante Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ läßt sich als Gradient einer skalaren Funktion schreiben.

7) Richtig oder falsch: Die Rotation eines Vektorfelds auf $\mathbb{R}^3$ verschwindet genau dann, wenn seine JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

Aufgabe 1: *(11 Punkte)*
Der Vektorraum $V \le \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei erzeugt von den Funktionen

$$\sinh x,\ \sinh 2x,\ \cosh x,\ \cosh 2x,\ e^{-2x},\ e^{-x},\ e^{x},\ e^{2x}\,,$$

und $W \le \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei der kleinste Vektorraum, der sowohl V als auch die konstanten Funktionen enthält.

a) Finden Sie Basen von V und von W!

b) Zeigen Sie: Die Vorschriften

$$\varphi(f) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \psi(f) = f'$$

definieren lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to V$.

c) Warum ist die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi\colon V \to V$ die Identität?

d) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ?

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basen!

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}l} aw + x + 2y + z &=& a+2 & (1) \\ -aw + x - 4y + z &=& a-2 & (2) \\ -aw + 2x + (2a-1)y + 5z &=& 2a+4 & (3) \\ -3aw - 5x + 2ay + az &=& 4-3a & (4) \end{array}$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ i-2 \\ 3-i \\ 1-i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^4$!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Zeigen Sie: Für zwei differenzierbare Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{grad}(\vec{V} \cdot \vec{W}) = \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \operatorname{grad} W_i + \sum_{i=1}^{n} W_i \cdot \operatorname{grad} V_i \,,$$

wobei $V_1, \dots V_n$ und $W_1, \dots, W_n$ die Komponenten von $\vec{V}$ und $\vec{W}$ sind.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome fünften Grades

a) für $f(x) = e^x$ um den Punkt $x = 1$
b) für $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$
c) für $f(x, y, z) = e^{x^2+y^3+z^4}$ um den Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Aufgabe 6: *(9 Punkte)*
Berechnen Sie, soweit möglich, die folgenden Integrale oder (falls sinnvoll) deren CAUCHYschen Hauptwert:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, *b)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, *c)* $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^3}$, *d)* $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^4}$, *e)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, *f)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Das Kurvenstück γ sei gegeben durch $\gamma\colon \begin{cases} [0, 100\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \big(2\cos 2t,\ 2\sin 2t,\ 3t\big) \end{cases}$.

a) Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch!
b) Welche Bogenlänge hat γ?

Formelsammlung

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 13. Juli 2002, um 13^{05} Uhr