5. Übungsblatt Höhere Mathematik I - Musterlösung

Aufgabe 3:
Da Teilaufgabe *a)* ein Spezialfall von Teil *b)* ist und sowieso verstanden wurde, werde ich hier nur eine Lösung des zweiten Teils angeben.
Als erstes wollen wir ein Polynom bzgl. $\mathcal{B}_1$ in eines bzgl. $\mathcal{B}_0$ umrechen. Sei also

$$a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + \ldots + a_i(X+1)^i + \ldots + a_n(X+1)^n \quad \in P_n.$$

Mit der binomischen Formel lösen wir die Klammern auf:

$$a_0 + a_1(X+1) + a_2(X^2+2X+1) + \ldots + a_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^k + \ldots + a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

Jetzt sammeln wir die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
& (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots + a_n) \\
+ \quad & \left(a_1 + 2a_2 + \ldots + \binom{i}{1} a_i + \ldots + \binom{n}{2} a_n\right) X \\
+ \quad & \ldots \\
+ \quad & \left(\binom{i}{i} a_i + \ldots + \binom{n}{i} a_n\right) X^i \\
+ \quad & \ldots \\
+ \quad & a_n X^n.
\end{aligned}$$

Der neue i-te Koeffizient, also der Koeffizient vor X^i (für $i = 0, \ldots, n$), ist somit

$$\begin{aligned}
a'_i &= \binom{i}{i} a_i + \binom{i+1}{i} a_{i+1} + \ldots + \binom{n}{i} a_n \\
&= \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} a_j.
\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $A := (a_{ij})_{i,j=0}^n$ mit $a_{ij} = \binom{j}{i}$ für $j \geq i$ und 0 sonst, dann sieht das in Matrixschreibweise so aus:

$$\underline{a}' = A \cdot \underline{a},$$

wobei $\underline{a}' = (a'_i)_{i=0}^n$ und $\underline{a} = (a_i)_{i=0}^n$ die Koeffizientenvektoren sind. Matrix A beschreibt also den Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_0$ und ist somit die gesuchte Matrix.
Die Matrix, die den Basiswechsel von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_1$ beschreibt, ist gerade A^{-1}. Man kann sich anhand der recht einfachen Form von A (obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen) die Inverse überlegen, oder man geht den gleichen Weg wie eben.
Sei also ein Polynom bzl. $\mathcal{B}_0$ gegeben:

$$a'_0 + a'_1 X^+ \ldots + a'_i X^i + \ldots + a'_n X^n \quad \in P_n.$$

Wir wenden einen kleinen Trick an:

$$a'_0 + a'_1\big((X+1) - 1\big) + \ldots + a'_i\big((X+1) - 1\big)^i + \ldots + a'_n\big((X+1) - 1\big)^n.$$

Das können wir wieder mit der binomischen Formel ausrechen:

$$a'_0 + a'_1\big((X+1)-1\big) + \ldots + a'_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k}(X+1)^k + \ldots + a'_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

Jetzt sammeln wir noch die Koeffizienten:

$$\begin{array}{ll} & (a'_0 + \ldots a'_n) \\ + & \left(a'_1 + \ldots + (-1)^{i-1}\binom{i}{1}a'_i + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}a'_n\right)(X+1) \\ + & \ldots \\ + & \left((-1)^{i-i}\binom{i}{i}a'_i + \ldots + (-1)^{n-i}\binom{n}{i}a'_n\right)(X+1)^i \\ + & \ldots \\ + & a'_n(X+1)^n. \end{array}$$

Der Koeffizient vor $(X+1)^i$ (für $i = 0, \ldots, n$) ist also

$$\begin{aligned} a_i &= (-1)^{i-i}\binom{i}{i}a'_i + \ldots + (-1)^{n-i}\binom{n}{i}a'_n \\ &= \sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}a'_j. \end{aligned}$$

Oder mit $B := (b_{ij})_{ij=0}^n$, wo $b_{ij} = (-1)^{j-i}\binom{j}{i} = (-1)^{i+j}\binom{j}{i}$ für $j \geq i$ und 0 sonst, in Matrixschreibweise:

$$\underline{a} = B \cdot \underline{a}'.$$

Matrix B beschreibt den Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_0$ und ist somit die gesuchte Inverse von A. Die Einträge von A und B unterscheiden sich nur im Vorzeichen: $b_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}$. B ist also auch obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen.