Antworten auf alle Fragen

1. Übungsblatt

1) *Richtig oder falsch:* Die leere Menge ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Falsch, denn jeder Vektorraum muß zumindest den Nullvektor enthalten.

2) *Richtig oder falsch:* Die Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen ist wieder linear.
Richtig, denn für $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ sowie $\vec{u}, \vec{v} \in U$ und $\lambda, \mu \in k$ ist

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= \psi\big(\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\big) = \psi\big(\lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v})\big) = \lambda\psi\big(\varphi(\vec{u})\big) + \mu\big(\varphi(\vec{v})\big) \\ &= \lambda(\psi \circ \varphi)(\vec{v}) + \mu(\psi \circ \varphi)(\vec{v}) .\end{aligned}$$

3) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{x+y}{xy}$ ist linear.
Falsch, denn in der zweiten Komponenten steht keine lineare Funktion. Beispielsweise ist $\varphi\left(\binom{1}{0} + \binom{1}{1}\right) = \varphi\left(\binom{2}{1}\right) = \binom{3}{2}$, aber $\varphi\left(\binom{1}{0}\right) + \varphi\left(\binom{1}{1}\right) = \binom{1}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$.

4) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ \binom{x}{y} \mapsto x + y + 1$ ist linear.
Falsch, denn φ bildet den Nullvektor ab auf 1, wohingegen ihn eine lineare Abbildung auf 0 abbilden müßte.

5) *Richtig oder falsch:* Falls für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ die Hintereinanderausführung $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ist, ist φ entweder die Identität oder die Nullabbildung.
Falsch, denn auch $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\left(\binom{x}{y}\right) = \binom{x}{0}$ hat diese Eigenschaft.
Bemerkung: Tatsächlich ist $\varphi \circ \varphi = \varphi$ für jede Projektion auf einen Untervektorraum, denn auf bereits projezierte Vektoren hat φ den gleichen Effekt wie die Identität.

2. Übungsblatt

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

1) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$.
Falsch, Gegenbeispiel: $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \mapsto \binom{x}{y}$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Bemerkung: Ähnliche Gegenbeispiele kann man für jede nichtinjektive Abbildung konstruieren.

2) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$.
Richtig, denn ist $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots \lambda_n(\vec{v}_n) = \vec{0}$, so ist erst recht

$$\lambda_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots \lambda_n\varphi(\vec{v}_n) = \varphi(\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots \lambda_n\vec{v}_n) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0} ,$$

also müssen alle λ_i verschwinden.

3) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{B}$ sei eine Basis des Vektorraums V und $M \subset B$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{B}$. Dann ist M eine Basis von $[M]$.
Richtig, denn jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist wieder linear unabhängig, und nach Voraussetzung erzeugt M den Vektorraum $[M]$.

4) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.
U_1, U_2 seien die die beiden Untervektorräume. Da $\vec{0} \in U_1$ und $\vec{0} \in U_2$, liegt der Nullvektor auch im Durchschnitt $U = U_1 \cap U_2$, und für $\vec{u}, \vec{v} \in U$ und $\lambda, \mu \in k$ liegt $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ in U_1 und U_2, also auch im Durchschnitt.

5) *Richtig oder falsch:* Sind U_1 und U_2 Untervektorräume von V, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von U_1 und $\mathcal{B}_2$ von U_2 derart, daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.
Richtig, ergänze eine Basis $\mathcal{B}$ von $U_1 \cap U_2$ zu einer Basis $\mathcal{B}_1$ von U_1 und zu einer Basis $\mathcal{B}_2$ von U_2; dann ist $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ Basis von $U_1 \cap U_2$.

3. Übungsblatt

1) Bestimmen Sie eine Basis des Kern der linearen Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y \end{cases}$!

Im Kern liegen alle Vektoren, die auf den Null„vektor“ $0 \in \mathbb{F}_2$ abgebildet werden, also alle Vektoren der Form $\binom{x}{x}$ mit $x \in \mathbb{F}_2$. Konkret: $\operatorname{Kern} \varphi = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{1}{1} \right\}$.

2) *Richtig oder falsch:* Jeder Vektorraum über $\mathbb{F}_4$ ist auch ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$.
Richtig, denn $\mathbb{F}_2$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{F}_4$, und da die Axione für alle $\lambda, \mu, \dots \in \mathbb{F}_4$ gelten, gelten sie erst recht für alle $\lambda, \mu, \dots \in \mathbb{F}_2$.

3) *Richtig oder falsch:* Die Binärdarstellung der natürlichen Zahlen macht $\mathbb{N}$ zum Vektorraum über $\mathbb{F}_2$.
Falsch, da beispielsweise $0 \notin \mathbb{N}$. Ersatzweise kann man auch damit argumentieren, daß es in $\mathbb{N}$ keine Inverse (bezüglich der Addition) gibt, oder daß für jeden Vektor $\vec{v}$ aus einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\vec{v} + \vec{v} = (1+1)\vec{v} = \vec{0}$ ist.

4) *Richtig oder falsch:* $\mathbb{F}_8$ kann als $\mathbb{F}_4$-Vektorraum aufgefaßt werden.
Falsch, denn ein n-dimensionaler $\mathbb{F}_4$-Vektorraum hat 4^n Elemente, also niemals acht.

5) *Richtig oder falsch:* Für $x, y \in \mathbb{F}_{2^N}$ ist $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.
Richtig, denn in jedem Körper ist $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + z^2$, und in den Körpern $\mathbb{F}_{2^N}$ ist $2xy = xy + xy = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{F}_{2^N}$.

4. Übungsblatt

1) *Richtig oder falsch:* Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
Falsch, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, und das ist für nichtkommutierende Matrizen etwas anderes. Konkret ist für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Summe $A + B$ gleich der Einheitsmatrix, hat also diese auch als Quadrat, $A^2 = B^2$ ist die Nullmatrix und $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

2) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei A^2 die Nullmatrix. Dann ist auch A gleich der Nullmatrix.

Falsch, beispielsweise ist auch $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $A^2 = A$. Dann ist A entweder die Einheitsmatrix oder die Nullmatrix.
Falsch, beispielsweise ist auch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Bemerkung: vgl. Blatt 1, Frage 5: $A^2 = A$ gilt für jede Abbildungsmatrix einer Projektion.

4) *Richtig oder falsch:* Wenn ein homogenes Gleichungssystem mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ eine nichttriviale rationale Lösung hat, hat es auch eine nichttriviale ganzzahlige Lösung.
Richtig, denn bei einem homogenen linearen Gleichungssystem bilden die Lösungen einen Vektorraum, insbesondere ist also auch jedes Vielfache einer Lösung selbst Lösung. Multiplikation mit dem Hauptnenner macht aus einer nichttrivialen rationalen Lösung eine ganzzahlige.

5) *(vier Zeilen, zwei Punkte)* Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(1-i)x + (1+i)y = 4$ und $ix - iy = -2$ über den komplexen Zahlen!
Multiplikation der zweiten Gleichung mit $-\frac{1-i}{i} = i + 1$ macht daraus

$$-(1-i)x + (1-i)y = -2 - 2i\,.$$

Addition zur ersten Gleichung liefert $2y = 2 - 2i$, also $y = 1 - i$. Nach der zweiten Gleichung ist $x - y = 2i$, also $x = 1 + i$.

5. Übungsblatt

1) Richtig oder falsch: Ein lineares Gleichungssystem ist unlösbar, wenn die Anzahl der Gleichungen die Anzahl der Variablen übersteigt.
Falsch, denn die Gleichungen müssen ja nicht voneinander unabhängig sein. Das System der hundert Gleichungen $nx+ny=n$ für $n=1,\dots,100$ etwa hat einen eindimensionalen Lösungsraum.

2) Richtig oder falsch: Ein lineares Gleichungssystem kann keine eindeutig bestimmte Lösung haben, wenn die Anzahl der Variablen die Anzahl der Gleichungen übersteigt.
Richtig, denn dann gibt es erst recht in der Endgestalt nach GAUSS-Elimination mehr Variablen als Gleichungen; falls diese einander widersprechen, ist das LGS unlösbar, ansonsten legt jede Gleichung höchstens eine Variable fest, es gibt also noch frei wählbare.

3) Π_a bezeichne die Menge aller Polynome vom Grad höchstens drei mit konstantem Koeffizienten a. Ist das Paar (Π_1, Π_0) ein affiner Raum?
Ja, denn Π_0 ist ein Vektorraum und die Differenz zweier Polynome aus Π_1 liegt in Π_0.

4) Richtig oder falsch: Hat die Matrix $A \in k^{n\times n}$ den Rang n, so ist für jedes $B \in k^{n\times m}$ die Matrixgleichung $AX = B$ eindeutig lösbar.
Richtig, denn die i-te Spalte $\vec{x}^{(i)}$ von X erfüllt das LGS $A\vec{x}^{(i)} = \vec{b}^{(i)}$, die i-te Spalte von B, und jedes dieser Gleichungssysteme ist eindeutig lösbar, da A den maximal möglichen Rang n hat und dieser gleich der Anzahl der Gleichungen ist.

5) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat die Matrix $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so ist für jedes $B \in k^{n\times p}$ die Matrixgleichung $AX = B$ eindeutig lösbar.
Falsch, denn hier ist der Rang von A kleiner als die Anzahl der Gleichungen. Beispielsweise hat $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a+w & c+z \\ b+w & d+z \\ w & z \end{pmatrix}$ als Lösungen.

6. Übungsblatt

1) Richtig oder falsch: Für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ ist ${}^t\big((AB)^{-1}\big) = {}^t(A^{-1})\,{}^t(B^{-1})$.
Richtig, denn ${}^t\big((AB)^{-1}\big) = {}^t\big(B^{-1}A^{-1}\big) = {}^t(A^{-1})\,{}^t(B^{-1})$.

2) Richtig oder falsch: Der Rang einer $n \times n$-Matrix A ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente der Matrix R aus ihrer LR-Zerlegung.
Falsch: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $L = E$ und $A = R$; A hat Rang zwei, aber es gibt nur einen von Null verschiedenen Diagonaleintrag.
Hier gab es anscheinend vielfach Probleme: Jede Eins in der Diagonalen sorgt zwar für einen neuen, linear unabhängigen Spaltenvektor, aber genau wie im obigen Beispiel können Spaltenvektoren existieren, bei denen sonstige Einträge auf die lineare Unabhängigkeit von gewissen anderen Spalten führen.

3) Für welche Matrix P ist $P\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$?
Multiplikation von links mit P muß die erste mit der letzten Zeile vertauschen, also ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Richtig oder falsch: Für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$.
Falsch, denn die linke Seite ist parallel zu $\vec{u}$, die rechte aber zu $\vec{w}$. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Richtig oder falsch: Für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.
Falsch, beispielsweise ist $\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$, aber $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{0} \times \vec{e}_2 = \vec{0}$.

6) Berechnen Sie die Determinante der 10×10-Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 10i + j$!
Da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Spalten jeweils der Vektor aus zehn Einsen ist, sind die Spalten linear abhängig, d.h. $\det A = 0$.

7. Übungsblatt

1) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in k^{n \times n}$ sei $A^3 = A$. Dann ist $\det A \in \{0, 1, -1\}$.
Richtig, denn nach dem Multiplikationssatz ist $\det A^3 = (\det A)^3$, hier also $(\det A)^3 = \det A$, d.h. $\det A$ ist Nullstelle des Polynoms $x^3 - x$ in k.

2) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.
Falsch, z.B. ist $\det(2E) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 2 \det E = 2$. (Tatsächlich ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.)

3) Richtig oder falsch: Ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen in n Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten hat eine ganzzahlige Lösung, falls die Determinante seiner Matrix gleich $+1$ oder -1 ist.
Richtig, denn nach der CRAMERschen Regel lassen sich die Lösungen als Quotienten zweier (hier ganzzahliger) Determinanten schreiben, wobei hier der Nenner als ± 1 vorausgesetzt ist.

4) Richtig oder falsch: Eine ganzzahlige $n \times n$-Matrix mit Determinante ± 1 hat eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen.
Richtig, denn die Spalten der inversen Matrix sind Lösungen der Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{e}_i$, auf die Frage vier anwendbar ist.

5) Richtig oder falsch: Falls auch die inverse Matrix der ganzzahligen $n \times n$-Matrix A ganzzahlige Einträge hat, ist $\det A = \pm 1$.
Richtig, denn nach dem Multiplikationssatz für Determinanten ist $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$, und die Determinante einer ganzzahligen Matrix ist ganzzahlig. Eins läßt sich aber nur mit Faktoren ± 1 als Produkt zweier ganzer Zahlen schreiben.

8. Übungsblatt

1) Richtig oder falsch: V sei ein EUKLIDischer Vektorraum und für $\vec{u}, \vec{v} \in V$ sei $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ für alle $\vec{w} \in V$. Dann ist $\vec{u} = \vec{v}$.
Richtig, denn $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ ist äquivalent zu $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$. Wenn dies für alle Vektoren $\vec{w}$ gilt, gilt es insbesondere für $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, also ist $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 0$, was nur für den Nullvektor richtig ist. Somit ist $\vec{u} = \vec{v}$.

2) Richtig oder falsch: Die LORENTZ-Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2$ macht $\mathbb{R}^4$ zum EUKLIDischen Vektorraum.
Falsch, denn sie ist nicht positiv definit. Ein Vektor mit Nullen in seinen ersten drei Komponenten und vierter Komponente $t \neq 0$ hat $-(ct)^2 < 0$ als Produkt mit sich selbst.

3) Richtig oder falsch: Die Abbildung $(z, w) \mapsto |zw|$ macht $\mathbb{C}$ zu einem EUKLIDischen Vektorraum.
Falsch, denn sie ist nicht linear: $-z$ und w haben dasselbe Skalarprodukt wie z und w statt das Negative davon.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \|\vec{v} \times \vec{w}\|$ macht $\mathbb{R}^3$ zu einem EUKLIDischen Vektorraum.
Falsch aus demselben Grund.

5) Richtig oder falsch: $\mathbb{C}$ mit dem Produkt

$$(x + iy) \odot (u + iv) = (xu - 4yv) + 2i(xv + yu) \quad \text{für} \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

ist ein HERMITEscher Vektorraum.
Falsch, denn $\odot$ ist symmetrisch, nicht HERMITEsch symmetrisch.

9. Übungsblatt

1) Die Niveaulinien $N_a(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = a\}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu den Funktioneswerten $a \in \mathbb{R}$ seien die Geraden $y = x - a$. Was ist f?
$f(x,y) = a$ ist hier äquivalent zu $y = x - a = x - f(x,y)$, d.h. $f(x,y) = x - z$.

2) Der Graph $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) = z\}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Koordinaten x,y in $\mathbb{R}^2$ und z in $\mathbb{R}$ sei die Fläche, die aus der Parabel $z = x^2$ durch Rotation um die z-Achse entsteht. Was ist f?
Rotation macht aus der Parabel das Paraboloid $z = x^2 = y^2$, also ist $z = f(x,y) = x^2 + y^2$.

3) Gibt es Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deren Graph gleich der Oberfläche einer Kugel ist?
Nein, denn über jeden Punkt von D muß genau ein Punkt liegen, während es bei einer Kugeloberfläche im allgemeinen zwei sind.

4) Was ist das Bild des Graphen der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ unter der Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(x,y,z) \mapsto (x,y)$?
Natürlich D selbst, denn der Graph besteht ja gerade aus den Punkten $(x,y,f(x,y))$ mit $(x,y) \in D$.

5) Richtig oder falsch: Die partielle Ableitung f_{xy} von $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ verschwindet genau dann überall, wenn es Funktionen $g,h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gibt, so daß $f(x,y) = g(x) + h(y)$ ist.
Richtig: Für $f(x,y) = g(x) + h(y)$ ist $f_x(x,y) = g'(x)$ unabhängig von y, also $f_{xy} = 0$. Umgekehrt ist f_{xy} die partielle Ableitung von f_x nach y, verschwindet also genau dann, wenn f_x nicht von y abhängt, d.h. $f_x(x,y) = \gamma(x)$ ist eine Funktion nur von x. Ist $g(x)$ eine Funktion mit $g'(x) = \gamma(x)$, so hat $f(x,y) - g(x)$ partielle Ableitung $f_x(x,y) - g'(x) = 0$, hängt also nur von y ab. Mit $h(y) = f(x,y) - g(x)$ ist $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

10. Übungsblatt

1) Richtig oder falsch: Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ verschwinde die JACOBI-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Richtig, denn die ij-Komponente der JACOBI-Matrix ist die Ableitung der i-ten Komponente von f nach der j-ten Variablen; da diese nicht verschwindet, hängt f_i nicht ab von x_j. Dies gilt für alle i,j und $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.

2) Richtig oder falsch: Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die JACOBI-Matrix von f symmetrisch.
Falsch, Gegenbeispiel ist etwa $f(x,y) = \frac{x^2y}{xy^2}$ mit $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$. Die JACOBI-Matrix hat nichts mit der HESSE-Matrix zu tun.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar.
Laut Vorlesung ist das bereits falsch für $n = 1$ mit Gegenbeispiel $f(x) = e^{-1/x^2}$. Ein Gegenbeispiel für $\mathbb{R}^n$ wäre etwa $f(\mathbf{x}) = e^{-(\mathcal{P}_{i=1}^n x_i)^2}$: Auch diese Funktion ist beliebig oft stetig differenzierbar, aber ihre identisch verschwindende TAYLOR-Reihe stellt sie nicht dar.

4) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!
z.B. $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$.

5) $\vec{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld. Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}$?

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} = \operatorname{grad}\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i x_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i x_n} \end{pmatrix}$$

11. Übungsblatt

1) *Richtig oder falsch:* Für eine um den Nullpunkt kugelsymmetrische Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ und ${}^t(x,y,z)$ in jedem Punkt linear abhängig.
Richtig, denn dann gibt es eine Funktion $F\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = F(x^2+y^2+z^2)$, also ist nach der Kettenregel

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} F'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x \\ F'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y \\ F'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2z \end{pmatrix} = F'(x^2+y^2+z^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2) *Richtig oder falsch:* Falls die stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ nur positive Werte annimmt, ist auch $\int_a^b f(x)\,dx$ positiv.
Richtig, denn da f dort sein Minimum m annehmen muß, ist $m > 0$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b m\,dx = m(b-a) > 0\,.$$

3) *Richtig oder falsch:* $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-1} = -\frac{3}{2}$.
Falsch, z.B. aufgrund der vorigen Frage. *(Die übliche Formel mit der Stammfunktion ist nicht anwendbar, da sowohl der Integrand als auch die Stammfunktion im Nullpunkt, einem Punkt im Integrationsintervall, nicht definiert sind. Tatsächlich divergiert dieses Integral.)*

4) *Richtig oder falsch:* Die Funktionen $g(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ und $h(x) = \int_a^x f(\xi+1)\,d\xi$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante.
Falsch, schon für die einfache Funktion $f(x) = x$ unterscheiden sich $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-a^2)$ und $h(x) = \frac{1}{2}(x^2-a^2) + (x-a)$ um eine nichtkonstante Funktion.

5) *Richtig oder falsch:* Für die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ für alle $a > 0$. Dann ist f eine ungerade Funktion.
Richtig, denn die Funktion

$$F(x) = \int_0^x \big(f(\xi) + f(-\xi)\big)\,d\xi = \int_0^x f(\xi)\,d\xi + \int_0^x f(-\xi)\,d\xi = \int_0^x f(\xi)\,d\xi + \int_{-x}^0 f(\xi)\,d\xi = \int_{-x}^x f(\xi)\,d\xi$$

verschwindet identisch und hat die Ableitung $F'(x) = f(x) + f(-x)$.

12. Übungsblatt

1) *Richtig oder falsch:* $i \cdot \sin(ix) = \sinh(x)$
Falsch, denn $i\cdot\sin(ix) = i\cdot\dfrac{e^{i\cdot ix} - e^{-i\cdot ix}}{2i} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\sinh x$.

2) *Richtig oder falsch:* Jede Stammfunktion einer stetigen geraden Funktion ist ungerade.
Falsch, z.B. ist $100 - \sin x$ eine nicht ungerade Stammfunktion des Cosinus.

3) *Richtig oder falsch:* Jede Stammfunktion einer stetigen ungeraden Funktion ist gerade.
Richtig, denn da für die Stammfunktion F gilt $F'(x) + F'(-x) = 0$, ist $F(x) - F(-x)$ eine konstante Funktion, die an der Stelle $x = 0$ verschwindet, d.h. $F(x) = F(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4) Was ist $\int_{-10}^{10} x^3 \sin x^4\,dx$?
Null, denn der Integrand ist ungerade und der Integrationsbereich symmetrisch zum Nullpunkt.

5) *Richtig oder falsch:* Durch $\gamma\colon [-100, 100] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ wird ein reguläres Kurvenstück beschrieben.
Richtig, denn das Skalarprodukt des Tangentenvektors mit sich selbst ist wegen der Relation $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ gleich $\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x$, und das verschwindet für kein reelles x.

13. Übungsblatt

1) *Richtig oder falsch:* Die Parametrisierung $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\quad t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$ macht die Kreislinie zu einem regulären Kurvenstück.
Nicht ganz richtig, denn γ_1 parametrisiert die Kreislinie nur bis auf den Punnkt $(1, 0)$. Diese Parametrisierung ist allerdings regulär, denn $\dot{\gamma}_1(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}\binom{4t}{2-2t^2}$ ist nirgends gleich dem Nullvektor.

2) *Richtig oder falsch:* Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.
Falsch, beispielsweise ist $\operatorname{div}\operatorname{grad}(x^2+y^2) = \Delta(x^2+y^2) = 4$.

3) *Richtig oder falsch:* Falls ein Vektorfeld $\vec{V}$ mit antisymmetrischer JACOBI-Matrix über der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion hat, ist es dort konstant.
Richtig, zumindest wenn die JACOBI-Matrix stetig ist, denn dann zeigt das SCHWARZsche Lemma, daß sie wegen der Existenz einer Stammfunktion symmetrisch sein muß. Die einzige symmetrische antisymmetrische Matrix ist aber die Nullmatrix, also ist $\vec{V}$ konstant.
(vgl. Blatt 10, Frage 1)

4) *Richtig oder falsch:* Falls für zwei Vektorfelder $\vec{V}$ und $\vec{W}$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Kurve γ in U gilt $\int_\gamma \vec{V}\cdot d\vec{x} = \int_\gamma \vec{W}\cdot d\vec{x}$, so ist $\vec{V}(\boldsymbol{x}) = \vec{W}(\boldsymbol{x})$ für alle Kurvenpunkte $\boldsymbol{x} = \gamma(t)$.
Falsch, etwa für $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto (t, t)$ und die Vektorfelder $\vec{V}(x, y) = \binom{x+1}{y}$ und $\vec{W}(x, y) = \binom{y}{x+1}$:

$$\int_\gamma \vec{V}\cdot d\vec{x} = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_\gamma \vec{W}\cdot d\vec{x}\,.$$

5) *Richtig oder falsch:* Ein Teilchen komme aus unendlicher Ferne entlang einer Kurve γ in die Nähe einer Punktladung, werde durch deren Feld $\vec{E}$ abgelenkt und verschwinde wieder in unendliche Weiten. Dann ist $\int_\gamma \vec{E}\,ds = 0$.
Richtig, denn das Feld einer Punktladung ist ein Potentialfeld, das Integral hängt also nur ab von den Energiepotentialen von Anfangs- und Endpunkt. Diese sind aber bei einer Punktladung in unendlicher Ferne gleich null (oder gleich einer vom Punkt unabhängigen Konstanten), so daß die Differenz verschwindet.