

gutartige Funktionen die FOURIER-Transformation. Die LAPLACE-Transformation ist eine Variante davon, die zwar inhaltlich etwas schwerer zu interpretieren ist als die FOURIER-Transformation, die dafür aber für größere Funktionsklassen existiert. Außerdem gibt es zur LAPLACE-Transformation sehr viel ausführlichere Tabellen als zur FOURIER-Transformation

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Zur Konstruktion der FOURIER-Transformation gehen wir aus von FOURIER-Reihen:

Für eine beliebige reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (grobe) Periode T und betrachten die Funktion $f_T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt wird. Mit $\omega = 2\pi/T$ ist die FOURIER-Reihe von f_T gleich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ki\omega t} dt.$$

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T} C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi} C(k\omega),$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω . Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu,$$

sofern dieses existiert. Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Um dies genauer zu untersuchen, geben wir diesen Konstruktionen Namen:

Definition: Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f .

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

und diese Konstruktion, die f aus \hat{f} rekonstruiert, heißt *inverse FOURIER-Transformation*:

Definition: Für $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\hat{g}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g .

Offensichtlich ist

$$\hat{\hat{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \hat{g}(t) = 2\pi \hat{\hat{g}}(-t).$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer Inversen. Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hiesigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

definiert, wobei j wie in der Elektrotechnik üblich, für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht. Demnach ist also $F(j\omega) = \hat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden, so daß je nach Buch durchaus sehr verschiedene Dinge gemeint sein können, wenn von „der“ FOURIER-Transformation und ihrer Umkehrung die Rede ist. In allen Fällen sind die Faktoren aber so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\hat{\hat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \hat{\hat{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

b) Die Laplace-Transformation

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des ursprünglichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für \check{f} und \hat{f} sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\check{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Offensichtlich hat das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei vielen Anwendungen interessieren Funktionen vor allem für positive Werte von t (die „Zukunft“), während negative Werte (die „Vergangenheit“) vernachlässigt werden können. Um daher eine gegebene Funktion f so abzuändern, daß das FOURIER-Integral an der unteren Grenze keine Konvergenzprobleme mehr hat, setzen wir sie für $t < 0$ einfach auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; schließlich soll das Ergebnis noch etwas mit der Funktion f zu tun haben. Deshalb dämpfen wir hier die Funktion nur durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t) e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, in Zeichen

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ in den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \Re t$ existieren.

Aus der Formel für die inverse FOURIER-Transformation läßt sich eine Formel für die inverse LAPLACE-Transformation ableiten: Wegen $\mathcal{L}\{f(t)\}(r+i\omega) = \hat{g}_r(t) = \hat{g}_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r+i\omega)$ sein; für $t > 0$ sollte daher

$$f(t) = e^{rt} g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r+i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

sein. Für $t < 0$ können wir natürlich keine entsprechende Formel erwarten, da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der Berechnung der LAPLACE-Transformation ignoriert werden.

c) Erste Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(t) = \sin \omega_0 t$. Ihr FOURIER-Integral

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-i\omega t} dt$$

ist ein unendliches Integral über eine periodische Funktion, existiert also nicht. Auch ein CAUCHYScher Hauptwert kann nicht existieren, denn wenn auch $\sin \omega_0 t$ eine ungerade Funktion ist, ist der Integrand als Ganzes weder gerade noch ungerade, da $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ gerade Realteil, aber ungeraden Imaginärteil hat.

Das LAPLACE-Integral

$$\mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s) = \int_0^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-st} dt$$

existiert für rein imaginäres $s = i\omega$ aus dem gleichen Grund nicht, und für ein s mit negativem Realteil kann es natürlich schon gar nicht

existieren. Ist aber $\Re t = s > 0$, so liefert die Regel für partielle Integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s) &= \int_0^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-st} dt \\ &= \sin \omega_0 t \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \omega_0 \cos \omega_0 t \frac{e^{-st}}{-s} dt \end{aligned}$$

etwas Verwertbares: e^{-st} geht dann nämlich für $t \rightarrow \infty$ gegen null, und an der unteren Grenze $t = 0$ verschwindet $\sin \omega_0 t$, so daß der erste Summand in der zweiten Zeile insgesamt verschwindet. Der zweite Summand ist bis auf den Faktor ω_0/s die LAPLACE-Transformierte des Kosinus, d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s) = \frac{\omega_0}{s} \mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\}(s).$$

Auch auf das LAPLACE-Integral für den Kosinus wenden wir die Regel der partiellen Integration an:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\}(s) &= \int_0^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-st} dt \\ &= \cos \omega_0 t \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \omega_0 \sin \omega_0 t \frac{e^{-st}}{-s} dt. \end{aligned}$$

Hier bekommen wir an der unteren Grenze des ersten Terms in der zweiten Zeile den Wert eins für den Kosinus, und an der oberen Grenze geht natürlich wieder der Exponentialfaktor gegen null, so daß

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega_0}{s} \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s)$$

ist. Insgesamt ist

$$\mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s) = \frac{\omega_0}{s} \mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\}(s) = \frac{\omega_0}{s^2} - \frac{\omega_0^2}{s^2} \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s)$$

oder

$$\left(1 + \frac{\omega_0^2}{s^2}\right) \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s) = \frac{\omega_0}{s^2}.$$

Multiplikation mit s^2 macht daraus

$$(s^2 + \omega_0^2) \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s) = \omega_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\}(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

für $\Re s > 0$. Damit kennen wir auch

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Auch bei den Potenzfunktionen $t \mapsto t^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es offensichtlich keine Chance, daß das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} t^n \sin \omega t dt$$

existiert; selbst der CAUCHYSche Hauptwert existiert nicht, denn wenn der Integrand des Realteils ungerade ist, ist der des Imaginärteils gerade und umgekehrt.

Die LAPLACE-Transformation verlangt die Berechnung von

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt.$$

Dieses Integral könnten wir induktiv durch partielle Integration berechnen; falls wir allerdings für n auch nicht ganzzahlige Werte einsetzen wollen, läßt es sich nicht mehr durch die uns bislang bekannten Funktionen ausdrücken.

Es läßt sich jedoch leicht zurückführen auf die sogenannte EULERSche *Gammafunktion*, die für positive Werte von x (oder allgemeiner für komplexe x mit positivem Realteil) definiert ist als

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dies ist ein uneigentliches Integral: Es ist natürlich immer uneigentlich an der oberen Grenze, und für $0 < x < 1$ zusätzlich auch noch an der unteren. (Für $\Re x \leq 0$ divergiert das Integral.)

Die untere Grenze ist harmlos, denn für $0 < x < 1$ ist

$$e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1},$$

und für $0 < x < 1$ hat die Stammfunktion $\frac{t^x}{x}$ der rechten Seite einfach den Wert Null für $t = 0$.

Auch die obere Grenze ist unproblematisch: Da die Exponentialfunktion stärker wächst als jede Potenz, ist für hinreichend große Werte von t

$$e^t \geq t^{r+x-1} \iff e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{K}{t^r}.$$

Dies gilt insbesondere für $r = 2$, und da $\int_1^{\infty} \frac{dr}{r^2} = 1$ konvergiert, gilt dasselbe für $\Gamma(x)$ an seiner oberen Grenze.

Die wichtigste Eigenschaft der Γ -Funktion folgt durch partielle Integration: Für $x > 0$ ist

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = e^{-t} \frac{t^x}{x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

oder

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

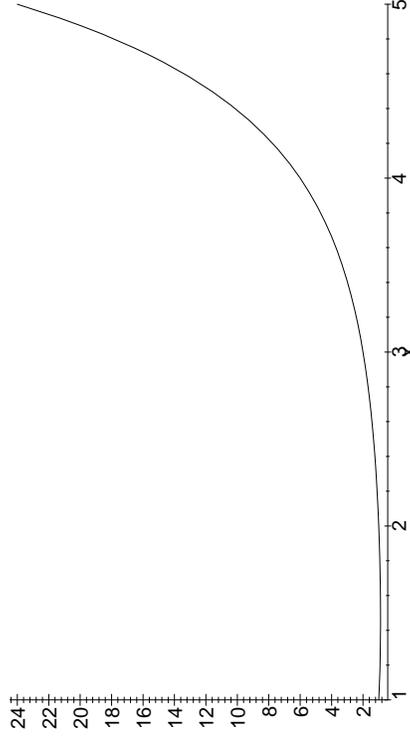


Abb. 15: Die Γ -Funktion

Aus dem elementar berechenbaren Wert

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

ergibt sich somit, daß für alle natürliche Zahlen n gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$; die Γ -Funktion ist also nicht als eine Art stetig gemachter Fakultätsfunktion.

GAUSS definierte auf andere Weise eine stetige Funktion $\Pi(x)$, für die $\Pi(n) = n!$ ist, aber wie sich bald herausstellte, ist $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$, so daß nur eine der beiden Funktionen wirklich gebraucht wird. Nach einigen Modewechseln im letzten Jahrhundert entscheidet man sich heute meist für $\Gamma(x)$: Diese Funktionswerte sind in Tafelwerken tabelliert, und numerische Verfahren für ihre Berechnung stehen in den einschlägigen Unterprogrammbibliotheken und Computeralgebrasystemen zur Verfügung. Tatsächlich läßt sich $\Gamma(x)$ mit Hilfe komplexer Integrale sogar fortsetzen zu einer auf ganz \mathbb{C} meromorphen Funktion mit der Eigenschaft $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; die einzigen Pole sind die durch diese Eigenschaft erzwungenen bei Null und den negativen ganzen Zahlen.

Mit dieser Funktion können wir die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = t^n$ sogar für jede *reelle* Zahl $n > -1$ leicht ausdrücken: Mit der Substitution $u = st$ wird

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{u^n}{s^n} e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$

Für nichtnegative ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ vereinfacht sich dies zu

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s . Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

Als nächstes wollen wir negative Potenzen t^{-n} betrachten. Deren LAPLACE-Transformation ist gegeben durch

$$\mathcal{L}\{t^{-n}\}(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{t^n} dt,$$

und dieses sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze ungentliche Integral existiert leider nicht: Für reelles $s > 0$ etwa ist für jedes $a > 0$ die Funktion e^{-as}/t^n überall im Intervall $(0, a]$ kleiner oder gleich dem Integranden; da ihre Stammfunktion $e^{-as}/(1-n)t^{n-1}$ für $n > 1$ und $e^{-as} \ln t$ für $n = 1$ für $t \rightarrow 0$ gegen unendlich geht, existiert das Integral

$$\int_0^a \frac{e^{-as}}{t^n} dt$$

für kein $a > 0$, und damit existiert erst recht das obige LAPLACE-Integral nicht.

Als Kuriosität am Rande sei erwähnt, daß für das entsprechenden FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^n} dt$$

zumindest der CAUCHYSche Hauptwert existiert: Für $n = 1$ haben wir in §3f) im Zusammenhang mit dem Integralsinus nachgerechnet, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} dt = \pi i \quad \text{für alle } \omega > 0.$$

Ersetzen wir hier ω durch $-\omega$, wird der Integrand komplex konjugiert, also auch der CAUCHYSche Hauptwert des Integrals, und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} dt = -\pi i \quad \text{für alle } \omega < 0.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t$, das natürlich ebenfalls nicht existiert, das aber den CAUCHYSchen Hauptwert null hat, da der Integrand ungerade ist. Der CAUCHYSche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt = \begin{cases} -\pi i & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0 \\ \pi i & \text{für } \omega < 0 \end{cases}.$$

Für $n > 1$ kann man genau wie in §3f) argumentieren und erhält (mit den dortigen Bezeichnungen) die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} dz$$

für den CAUCHYSchen Hauptwert. Reihenentwicklung der Exponentialfunktion führt auf

$$\int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} dz = \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-n}}{k!} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} z^{k-n} dz.$$

Für $k = n - 1$ ist das rechtsstehende Integral

$$\int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} z^{-1} dz = \text{Ln}(\delta) - \text{Ln}(-\delta) = \text{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ ; im Falle $k \neq n - 1$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} z^{k-n} dz = \frac{\delta^{k-n+1} - (-\delta)^{k-n+1}}{k}$$

für $k \equiv n - 1 \pmod 2$ und ist gleich $2\delta^k/k$ sonst. Da die geometrische Reihe $2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \rightarrow 0$ gegen null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} dz = \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \pi i \quad \text{für } \omega > 0.$$

Für $\omega < 0$ wird wieder der Integrand komplex konjugiert, also auch das Ergebnis; im Faktor $(i\omega)^{n-1}$ sorgt ω selbst für die komplexe Konjugation, so daß rechts nur πi konjugiert werden muß, d.h. der CAUCHYSche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^n} dt = \begin{cases} -\frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \pi & \text{für } \omega > 0 \\ \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \pi & \text{für } \omega < 0 \end{cases}.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t^n$, daß für ungerades n den CAUCHYSchen Hauptwert null hat und für gerades n gegen unendlich divergiert.

Als letztes Beispiel wollen wir eine der wichtigsten Funktionen der Elektrotechnik betrachten, den *Rechteckimpuls*. Wir beschränken uns hier auf einen zum Nullpunkt symmetrischen Impuls der Form

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } -b \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-b}^b ae^{-i\omega t} dt = \frac{a}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{a}{\omega} \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a \sin \omega b}{\omega}. \end{aligned}$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\text{sinc } t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\hat{f}(\omega) = 2ab \text{sinc } \omega b.$$

(Anstelle von $\text{sinc } t$ schreiben manche Autoren auch $\text{si } t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Integralsinus $\text{Si } t$, verwechseln.)

Die LAPLACE-Transformierte dieses Rechteckimpulses ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^b ae^{-st} dt = \frac{a}{s} (1 - e^{-sb}),$$

und das ist gleichzeitig auch die LAPLACE-Transformierte der Rechteckimpulse

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

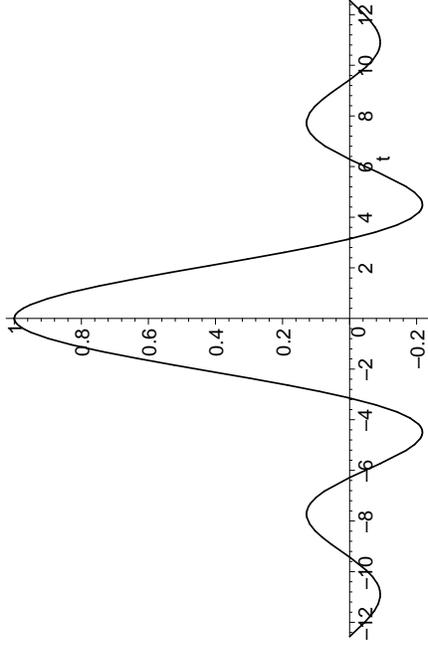


Abb. 16: Die Funktion $\text{sinc } t = \frac{\sin t}{t}$

Dagegen existiert die FOURIER-Transformierte $\widehat{h}_i(\omega)$ nicht einmal, und auch

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^b ae^{-i\omega t} dt = \frac{a}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_0^b \\ &= \frac{ia}{\omega} (e^{-i\omega b} - 1) \end{aligned}$$

ist deutlich verschieden von $\widehat{f}(\omega)$.

d) Erste Rechenregeln

Die gerade betrachteten Beispiele sind zwar mit die wichtigsten Funktionen, die in den gängigen Anwendungen auftauchen; allerdings findet man sie dort selten als *reine* Sinus- oder Kosinusschwingungen oder als *reine* Potenzen; häufiger sind Linearkombinationen dieser Funktionen, eventuell noch verbunden mit Phasenverschiebungen und anderen Transformationen des Arguments. In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Rechenregeln zusammengestellt werden, die in solchen Situationen gebraucht werden.

Die fundamentalste und einfachste Regel ist

Lemma: Sowohl die FOURIER- als auch die LAPLACE-Transformation sind lineare Operationen, d.h. für zwei Funktionen f, g und zwei komplexe Zahlen λ, μ gilt

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(\omega) = \lambda \widehat{f}(\omega) + \mu \widehat{g}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\}(s) = \lambda \mathcal{L}\{f\}(s) + \mu \mathcal{L}\{g\}(s),$$

sofern jeweils beide Seiten existieren. ■

Damit ist etwa

$$\mathcal{L}\{a \cos \omega t + b \sin \omega t\}(s) = \frac{as + b\omega}{s^2 + \omega^2},$$

und entsprechend läßt sich auch die LAPLACE-Transformation jedes trigonometrischen Polynoms berechnen.

Für ein Polynom $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ ist entsprechend

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{n! a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)! a_{n-1}}{s^n} + \dots + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s} \\ &= \frac{n! a_n + (n-1)! a_{n-1} s + \dots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ebenfalls sehr einfach läßt sich der Effekt von Verschiebungen sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich ausdrücken: Die FOURIER-Transformierte von $g(t) = f(t+c)$ berechnet sich mittels der Substitution $u = t + c$ als

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+c)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u-c)} du \\ &= e^{i\omega c} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du = e^{i\omega c} \widehat{f}(\omega) \end{aligned}$$

und die LAPLACE-Transformierte als

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} f(t+c)e^{-st} dt = \int_c^{\infty} f(u)e^{-s(u-c)} du \\ &= e^{sc} \int_c^{\infty} f(u)e^{-su} du,\end{aligned}$$

eine Formel, die wegen der geänderten unteren Integrationsgrenze nicht sonderlich nützlich aussieht. Allerdings war hier auch von vornherein nicht viel zu erwarten, denn schon zur Definition der LAPLACE-Transformation müssen wir schließlich einen festen Zeitpunkt als Nullpunkt der Zeitskala auszeichnen, und niemand sollte sich wundern, daß Transformationen, die diese Auszeichnung nicht respektieren, bei der LAPLACE-Transformation zu Problemen führen. Man kann freilich das hintere Integral zumindest für $c > 0$ mit Gewalt als LAPLACE-Transformation auffassen, indem man den Integranden mit einer geeigneten Sprungfunktion multipliziert:

Die HEAVISIDE-Funktion ist definiert durch

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Ein Funktionswert an der Stelle Null wird üblicherweise nicht definiert, die die Funktion praktisch immer nur in Integralen auftritt, wo es auf diesen einen Wert ohnehin nicht ankommt.



OLIVER HEAVISIDE (1850–1925) wurde in den Londoner Slums geboren und hatte nur wenig formale Ausbildung; an akademischer Wissenschaft hatte er zeitweises kein Interesse. Unter dem Einfluß seines Onkels CHARLES WHEATSTONE (nach dem die gleichnamige Brücke benannt ist) wandte er sich zur Telegraphie und arbeitete als Telegraphist zunächst in Dänemark, dann in Newcastle. In diesem Zusammenhang beschäftigte er sich mit Elektrizitätslehre; unter anderem brachte er die MAXWELLSchen Originalgleichungen (20 Gleichungen in 20 Unbekannten) auf die heute übliche Form. Weiter untersuchte er die Bedingungen für die störungsfreie Übertragung eines Signals,

sagte die für weitverbreiteten Kurzwellenfunktionen wesentliche Reflexionseigenschaft der Ionosphäre (HEAVISIDE-Schicht) voraus und entwickelte einen Operatorkalkül zur Übersetzung von Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen.

Mit Hilfe dieser Funktion können wir obige Gleichung umschreiben als

$$\mathcal{L}\{f(t+c)\}(s) = e^{sc} \mathcal{L}\{f(t)H(t-c)\}(s).$$

Im Frequenzbereich gibt es keine solchen Probleme; hier ist einfach

$$\widehat{f}(\omega+c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega+c)t} dt = \widehat{e^{-ict}f(t)}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s+c) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+c)t} dt = \mathcal{L}\{e^{-ct}f(t)\}(s).$$

Diese Formeln sind auch rückwärts gelesen sehr nützlich: Wollen wir etwa die LAPLACE-Transformierte einer gedämpften Schwingung

$$f(t) = e^{-\lambda t}(a \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

berechnen, so ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{a \cos \omega t + b \sin \omega t\}(s+\lambda) = \frac{a(s+\lambda) + b\omega}{(s+\lambda)^2 + \omega^2}.$$

Auch die LAPLACE-Transformierte der Exponentialfunktion selbst läßt sich so ausrechnen: Für $\Re s > \lambda$ ist

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \frac{1}{s-\lambda},$$

denn auf $1 = t^0$ können wir die Formel für t -Potenzen anwenden.

Die FOURIER-Transformierte einer Exponentialfunktion existiert natürlich nicht, da das FOURIER-Integral immer an mindestens einer der beiden Grenzen divergiert.

Schließlich können wir noch ohne großen Aufwand den Effekt einer Streckung im Zeit- oder Frequenzbereich ausrechnen: Für $g(t) = f(ct)$

zeigt die Substitution $u = ct$, daß gilt

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{c}u} \frac{du}{c} = \frac{1}{c} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

und

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(ct)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(u)e^{-\frac{s}{c}u} \frac{du}{c} = \frac{1}{c} \mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{c}\right).$$

Das Verhalten von FOURIER- und LAPLACE-Transformation im Zusammenhang mit Ableitungen, Produkten und Faltungen werden wir in den nächsten beiden Paragraphen ausführlich untersuchen.

§6: Ableitungen und Differentialgleichungen

Als erstes wollen wir die Transformationen von Ableitungen und die Ableitungen von Transformationen betrachten; wie sich zeigen wird, führt dies zu einer Methode, mit der sich Anfangswertprobleme für lineare Differentialgleichungen oft recht bequem lösen lassen. Es lohnt sich daher, zuerst noch etwas in Vorbereitungen zu investieren, um das notwendige Werkzeug bereitzustellen.

a) Ableitungen unter dem Integralzeichen

Lemma: a) Die Funktion $h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H: \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \int_c^d h(\omega, t) dt \end{cases}$$

stetig.

b) Ist h zusätzlich r -mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^r H}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial \omega^r}(\omega, t) dt.$$

Beweis: a) Da $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t \in [c, d]$ gilt

$$|h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \delta.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \leq \int_c^d |h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)| dt < \varepsilon(d - c).$$

Da $d - c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d - c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega + \Delta) - H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega + \Delta, t) - h(\omega, t)}{\Delta} dt,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega + \Delta$. Für $\Delta \rightarrow 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen a), daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi \rightarrow \omega} \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t) dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t) dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ■

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t) dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(\omega, t) d\omega \right) dt.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrations-
theorie in [HMI], Kap. II, §6b), da beide Seiten das Integral

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} h(\omega, t) d\omega dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \leq \omega \leq b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d \left(\int_a^\omega h(\xi, t) d\xi \right) dt.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t) dt,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t) dt \right) d\omega = \int_a^b H'(\omega) d\omega = H(b) - H(a) = H(b),$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ■



Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Integrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \rightarrow -\infty$ und $b, d \rightarrow +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, falls die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)| dt \right) d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)| d\omega \right) dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t) dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t) d\omega \right) dt.$$

b) Transformationen und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mindestens r mal stetig differenzierbar und existieren die FOURIER-Transformationen von $f, t^r f$ und $f^{(r)}$, so ist

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r t^r \widehat{f}(\omega) \quad \text{oder} \quad t^r \widehat{f}(\omega) = i^r \frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) \quad \text{oder} \quad \widehat{f^{(r)}}(\omega) = (i\omega)^r \widehat{f}(\omega).$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\begin{aligned} \frac{d^r \widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{d\omega^r} \left(f(t) e^{-i\omega t} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r f(t) e^{-i\omega t} dt = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega), \end{aligned}$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t} dt,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = ie^{-i\omega t},$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t} dt = f(t) \cdot ie^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) \cdot ie^{-i\omega t} dt.$$

Da die FOURIER-Transformierte von f existiert, geht $f(t)$ für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen null; der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega \widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-i\omega t} dt = -i \cdot \widehat{\dot{f}}(\omega).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Für die LAPLACE-Transformation gelten ähnliche Regeln: Falls die Funktion f mindestens r mal stetig differenzierbar ist und die LAPLACE-Transformierten ihrer Ableitungen existieren, ist nach der Regel über

partielle Integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(r)}(t)\}(s) = s^r \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{r-1} f(0) - s^{r-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(r-1)}(0).$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil*:

In der Praxis hat man es fast immer mit sogenannten *Anfangswertproblemen* zu tun, d.h. man kennt den Zustand eines Systems (beschrieben durch eine Funktion $f(t)$ der Zeit) zu einem gewissen Zeitpunkt t_0 , und man will die Einfachheit halber als null annehmen wollen, und man kennt Naturgesetze für die weitere Entwicklung des Systems. Letztere haben meist die Form von Differentialgleichungen; ein Anfangswertproblem besteht darin, daß man anhand der Differentialgleichung und der bekannten Funktionswerte zum Zeitpunkt t_0 die weitere Entwicklung des Systems berechnen will, d.h. die Funktion f . Wir werden uns im nächsten Kapitel ausführlich mit Differentialgleichungen beschäftigen; hier beschränken wir uns auf den in der Elektrotechnik sehr häufigen Fall einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, d.h. wir suchen eine Funktion $y(t)$, für die gilt

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

und

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebrai-

sche Gleichung

$$s^n \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \dots - y_{(n-1)} + a_{n-1}(s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \dots - y_{(n-2)})$$

⋮

$$+ a_1(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0) + a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Mit dem *charakteristischen Polynom*

$$f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

der Differentialgleichung und den Abkürzungen

$$c_{n-1} = y_0, \quad c_{n-2} = y_1 + a_{n-1}y_0, \quad c_{n-3} = y_2 + a_{n-1}y_1 + a_{n-2}y_0,$$

$$\dots, \quad c_0 = y_{n-1} + a_{n-1}y_{n-2} + \dots + a_1y_0$$

läßt sich dies auch kürzer schreiben als

$$f(s) \cdot \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - c_{n-1}s^{n-1} - c_{n-2}s^{n-2} - \dots - c_1s - c_0 = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)$$

oder

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{b(t)\}(s) + c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \dots + c_1s + c_0}{f(s)}$$

Falls sowohl die gesuchte Lösungsfunktion als auch die rechte Seite $b(t)$ LAPLACE-transformierbar sind, können wir also die LAPLACE-transformierte $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ der Lösungsfunktion leicht berechnen. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt dann auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems – sofern wir wissen, daß eine Funktion $y(t)$ zumindest für $t > 0$ durch $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ eindeutig bestimmt ist.

Letzteres ist (abgesehen von kleineren Besonderheiten, die für praktische Anwendungen kaum eine Rolle spielen) in der Tat der Fall, allerdings wird der entsprechende Beweis – genau wie im Fall der FOURIER-Reihen – recht viel Arbeit kosten. Um zu sehen, daß sich diese Arbeit auch lohnt, wollen wir daher zunächst einige Anwendungen betrachten.

Bevor wir damit beginnen, sollten wir uns noch die Ableitung der LAPLACE-Transformierten einer Funktion anschauen: Wegen der Vertauschbarkeit der Integration über t und der Ableitung nach s erhalten wir ohne jede Mühe die Formel

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(f(t)e^{-st}) dt = - \int_0^\infty t f(t)e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s).$$

Durch Induktion folgt für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\frac{d^r}{ds^r}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = (-1)^r \mathcal{L}\{t^r f(t)\}(s),$$

die bis auf den Vorfaktor $(-1)^r$ genauso aussieht wie die entsprechende Formel

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = i^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

für die FOURIER-Transformation.

c) Ungedämpfte Schwingungen

Nach diesen Vorbereitungen können wir daran gehen, einige physikalisch interessante Anfangswertprobleme zu lösen.

Als erstes Beispiel betrachten wir die extrem einfache Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x -Richtung bewegen kann:

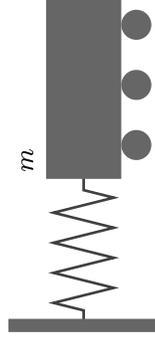


Abb. 17: Eine schwingende Masse

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage; nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m} x(t) = 0.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2 \mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m} \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s \cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0) \cdot s + \dot{x}(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2 + \omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformierten

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

d) Gedämpfte Schwingungen

Ungedämpfte Schwingungen wir im letzten Abschnitt wird man in der Realität eher selten beobachten: In den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird in den einfachsten Modellen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein

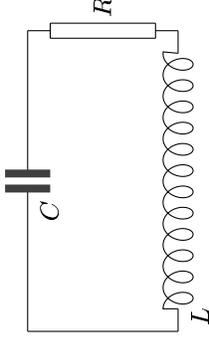


Abb. 18: Ein elektrischer Schwingkreis

konstantes Vielfaches von $\dot{x}(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 18 hintereinanderschalten:

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C},$$

der an der Spule ist nach der LENZSchen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\dot{Q}(t),$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMSchen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t).$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\dot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0.$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\dot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{1}{LC}.$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen

Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können, bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho \dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Um zu sehen, wie sich die Lösungen solcher Gleichungen verhalten können, betrachten wir einige konkrete Beispiele. Beginnen wir mit dem Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2.$$

Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ gilt dann

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 8(sY(s) - 1) + 25Y(s) = (s^2 + 8s + 25)Y(s) - s - 10 = 0,$$

$$\text{also ist } Y(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25}.$$

Wenn wir von der (bislang noch nicht bewiesenen) Annahme ausgehen, daß die gesuchte Funktion $y(t)$ durch ihre LAPLACE-Transformierte eindeutig bestimmt ist, müssen wir nun eine Funktion $y(t)$ finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich $Y(s)$ ist. Unter den wenigen Beispielen, die wir bislang kennen, haben nur die Transformationen von Sinus und Kosinus quadratische Nenner, allerdings sind diese von der Art $s^2 + \omega^2$. Um einen linearen Term zu bekommen, müssen wir s durch $s + \lambda$ ersetzen; dies entspricht, wie wir gesehen haben, der Multiplikation mit einer Exponentialfunktion $e^{-\lambda t}$:

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t} \cos \omega t\}(s) = \frac{s + \lambda}{(s + \lambda)^2 + \omega^2} \quad \text{und} \\ \mathcal{L}\{e^{-\lambda t} \sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}.$$

Wir müssen daher versuchen, den Nenner auf die Form $(s + \lambda)^2 + \omega^2$ zu bringen und den Zähler dann als Linearkombination von $s + \lambda$ und ω zu schreiben. Dies leistet einer der ältesten Tricks der Algebra, die schon

seit über 2000 Jahre bekannte quadratische Ergänzung:

$$Y(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25} = \frac{s + 10}{(s + 4)^2 + 9} = \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 3^2} + 2 \cdot \frac{3}{(s + 4)^2 + 3^2} \\ = \mathcal{L}\{e^{-4t} \cos 3t\}(s) + 2\mathcal{L}\{e^{-4t} \sin 3t\}(s) \\ = \mathcal{L}\{e^{-4t} (\cos 3t + 2 \sin 3t)\}(s).$$

Wenn wir, wie auch bei allen folgenden Beispielen, davon ausgehen, daß eine Funktion durch ihre LAPLACE-Transformation zumindest für alle positiven Werte von t eindeutig bestimmt ist, kennen wir also die gesuchte Funktion

$$y(t) = e^{-4t} (\cos 3t + 2 \sin 3t).$$

Sie beschreibt eine gedämpfte Schwingung der Art, wie sie in Abbildung 19 zu sehen ist. (Die Funktion $y(t)$ geht bezogen auf ihre Periode zu schnell gegen Null um ein interessantes Bild zu geben.)

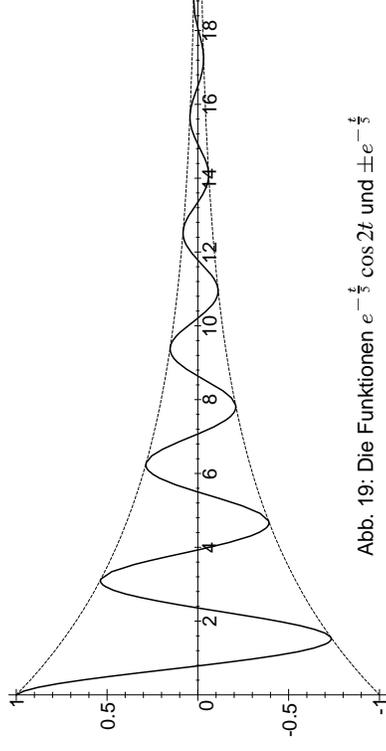


Abb. 19: Die Funktionen $e^{-\frac{t}{2}} \cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{t}{2}}$

Als nächstes Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 15y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 3.$$

LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2 Y(s) - s - 3 + 8(sY(s) - 1) + 15Y(s) = (s^2 + 8s + 15)Y(s) - s - 11 = 0,$$

wobei wir wieder, wie auch in allen folgenden Beispielen, zur Abkürzung $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ setzen. Auflösen nach $Y(s)$ führt auf

$$Y(s) = \frac{s+11}{s^2+8s+15} = \frac{s+11}{(s+4)^2-1}.$$

Wegen des Minuszeichens im Nenner ist dies nicht die LAPLACE-Transformierte einer gedämpften Schwingung. Dafür sagt uns die dritte binomische Formel, daß wir den Nenner auch als $(s+3)(s+5)$ schreiben können; via Partialbruchzerlegung können wir $Y(s)$ daher als Summe zweier rationaler Funktionen mit Nenner $s+3$ bzw. $s+5$ schreiben. Der Ansatz

$$\frac{a}{s+3} + \frac{b}{s+5} = \frac{(a+b)s+5a+3b}{(s+3)(s+5)} = \frac{s+11}{(s+3)(s+5)}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$a+b=1 \quad \text{und} \quad 5a+3b=11.$$

Subtraktion von fünfmal der ersten Gleichung von der zweiten ergibt $-2b=6$, also ist $b=-3$ und $a=4$. Damit ist

$$Y(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{3}{s+5}.$$

Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, daß $1/s$ die LAPLACE-Transformation der Konstanten Eins ist, also ist $1/(s+\lambda)$ die von $e^{-\lambda t}$. Somit ist $Y(s)$ die LAPLACE-Transformierte von $4e^{-3t} - 3e^{-5t}$, und dies ist auch die gesuchte Lösungsfunktion. In diesem Beispiel geht $y(t)$ also exponentiell gegen Null.

Als letztes Beispiel zu diesem Typ von Gleichungen wollen wir noch das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) + 8y(t) + 16 = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2$$

betrachten. Hier ist

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 8(sY(s) - 1) + 16Y(s) = (s^2 + 8s + 16)Y(s) - s - 10 = 0,$$

also

$$Y(s) = \frac{s+10}{s^2+8s+16} = \frac{s+10}{(s+4)^2} = \frac{s+4}{(s+4)^2} + \frac{6}{(s+4)^2} = \frac{1}{s+4} + \frac{6}{(s+4)^2}.$$

Da $1/s^2$ die LAPLACE-Transformierte von t ist, entspricht der zweite Summand der Funktion $6te^{-4t}$, d.h. $Y(s)$ ist die LAPLACE-Transformierte von $y(t) = e^{-4t} + 6te^{-4t} = (1+6t)e^{-4t}$. Hier haben wir also ein Produkt einer Exponentialfunktion mit einer linearen Funktion. Wie Abbildung 20 zeigt, dominiert in solchen Fällen für kleine t die lineare Funktion, aber langfristig sorgt natürlich der Dämpfungsfaktor $e^{-\lambda t}$ dafür, daß sich die Funktion asymptotisch der Null annähert.

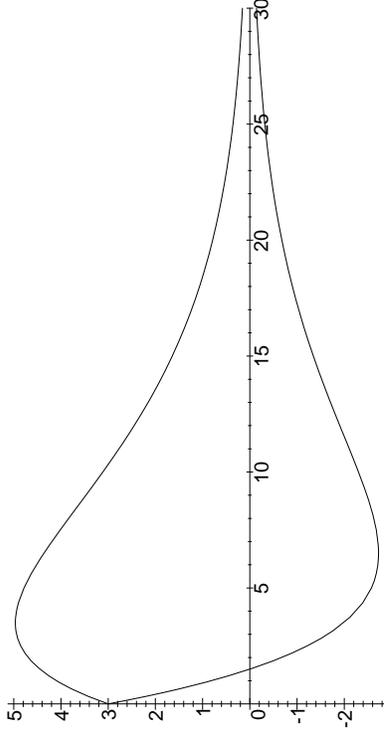


Abb. 20: Die Funktionen $(3 \pm 2t)e^{-t/3}$

Kehren wir zurück zum allgemeinen Fall, dem Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2 \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0) + \sigma \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{\left(s + \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}}.$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir $\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$ setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s + \rho/2)}{(s + \rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s + \rho/2)^2 + \omega^2}.$$

In diesen beiden Summanden erkennen wir (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2} \cos \omega t$ und $e^{-\rho t/2} \sin \omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2} \cos \omega t + \frac{y_1 + y_0 \rho/2}{\omega} e^{-\rho t/2} \sin \omega t \\ &= e^{-\rho t/2} \left(y_0 \cos \omega t + \frac{y_1 + y_0 \rho/2}{\omega} \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto schneller geht die Lösungsfunktion gegen Null.

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir $\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$ setzen und haben

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{s y_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2)^2 - \omega^2} = \frac{s y_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2 + \omega)(s + \rho/2 - \omega)}.$$

Wie im obigen Beispiel ist hier eine Partialbruchzerlegung fällig; wegen

$$\frac{1}{(s + \rho/2) - \omega} - \frac{1}{(s + \rho/2) + \omega} = \frac{2\omega}{(s + \rho/2)^2 - \omega^2}$$

ergibt sich die LAPLACE-Transformierte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{1}{2\omega} \left(\frac{s y_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2) - \omega} - \frac{s y_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2) + \omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \left(\frac{y_0(s + \rho/2 - \omega) + y_0 \rho/2 + y_1 + y_0 \omega}{s + \rho/2 - \omega} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_0(s + \rho/2 + \omega) + y_0 \rho/2 + y_1 - y_0 \omega}{s + \rho/2 + \omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \left(y_0 + \frac{y_0 \rho/2 + y_1 + y_0 \omega}{s + \rho/2 - \omega} - y_0 - \frac{y_0 \rho/2 + y_1 - y_0 \omega}{s + \rho/2 + \omega} \right) \\ &= \frac{y_0 \rho/2 + y_1 + y_0 \omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s + \rho/2 - \omega} \\ &\quad - \frac{y_0 \rho/2 + y_1 - y_0 \omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s + \rho/2 + \omega}. \end{aligned}$$

Diese Summanden können wir nun als LAPLACE-Transformierte identifizieren und erhalten

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{y_0 \rho/2 + y_1 + y_0 \omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2 - \omega)t}\}(s) - \frac{y_0 \rho/2 + y_1 - y_0 \omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2 + \omega)t}\}(s).$$

Die Lösung ist also

$$y(t) = \frac{y_0 \rho/2 + y_1 + y_0 \omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2 - \omega)t} - \frac{y_0 \rho/2 + y_1 - y_0 \omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2 + \omega)t}.$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2};$$

daher sind dies zwei Exponentialfunktionen, die für $t \rightarrow \infty$ gegen null gehen. Damit entlädt sich der Kondensator in diesem Fall ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier abfallender Exponentialfunktionen.

Die Bedingung $\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad \text{oder} \quad R > \sqrt{\frac{L}{C}};$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall $\sigma = \rho^2/4$. Hier ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{s y_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2)^2} = \frac{y_0(s + \rho/2)}{(s + \rho/2)^2} + \frac{y_1 + y_0 \rho/2}{(s + \rho/2)^2} \\ &= \frac{y_0}{s + \rho/2} + \frac{y_1 + y_0 \rho/2}{(s + \rho/2)^2}. \end{aligned}$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, folgt

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0 \frac{\rho}{2} \right) t \right) e^{-\frac{\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Exponentialfunktion.

e) Erzwungene Schwingungen

Im Stromkreis aus dem letzten Abschnitt floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre, daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 18 durch eine Wechselstromquelle mit Kreisfrequenz ω_0 . Die Differentialgleichung wird damit zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t,$$

in abstrakt-mathematischer Schreibweise geht es also um Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{y}(t) + p\dot{y}(t) + \sigma y(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

Betrachten wir auch hierzu wieder zunächst einige Beispiele, etwa das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 40 \cos t + 40 \sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 4.$$

Die LAPLACE-Transformation macht daraus

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 2s - 4 + 8(sY(s) - 2) + 25Y(s) \\ = (s^2 + 8s + 25)Y(s) - 2s - 20 = \frac{40s + 40}{s^2 + 1}, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$Y(s) = \frac{2s + 20}{s^2 + 8s + 25} + \frac{40s + 40}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)}.$$

Den ersten Summanden kennen wir im wesentlichen bereits aus dem letzten Abschnitt; beim zweiten hilft offensichtlich nur eine Partialbruchzerlegung: Wir setzen an

$$\begin{aligned} \frac{40s + 40}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)} &= \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 8s + 25} \\ &= \frac{(as + b)(s^2 + 8s + 25) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)} \\ &= \frac{(a + c)s^3 + (8a + b + d)s^2 + (25a + 8b + c)s + 25b + d}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)}, \end{aligned}$$

d.h. $a + c = 0$, $8a + b + d = 0$, $25a + 8b + c = 40$ und $25b + d = 40$.

Damit ist $c = -a$ und $d = 40 - 25b$; setzen wir das ein in die beiden mittleren Gleichungen, folgt

$$8a + b + 40 - 25b = 8a - 24b + 40 = 0 \quad \text{und} \quad 24a + 8b = 40.$$

Subtrahiert man dreimal die erste Gleichung von der zweiten, folgt, daß $80b = 160$ ist, also $b = 2$ und $a = 1$. Damit kennen wir auch $c = -1$ und $d = -10$ und

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 20}{s^2 + 8s + 25} + \frac{s + 2}{s^2 + 1} - \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25} \\ &= \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25} \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 3^2} + 2 \cdot \frac{3}{(s + 4)^2 + 3^2} \\ &= \mathcal{L}\{\cos t + 2 \sin t + e^{-4t}(\cos 3t + 2 \sin 3t)\}(s). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Lösungsfunktion

$$y(t) = \cos t + 2 \sin t + e^{-4t}(\cos 3t + 2 \sin 3t).$$

Sie ist Summe aus einer gedämpften Schwingung, wie wir sie ohne die rechte Seite hätten, und einer reinen Schwingung der anregenden Frequenz, die sich langfristig durchsetzt. Im Vergleich zur rechten Seite hat sie jedoch sowohl eine andere Amplitude als auch eine andere Phase. Abbildung 21 zeigt, wieder mit besser zum Zeichnen geeigneten Parametern, eine solche Summe.

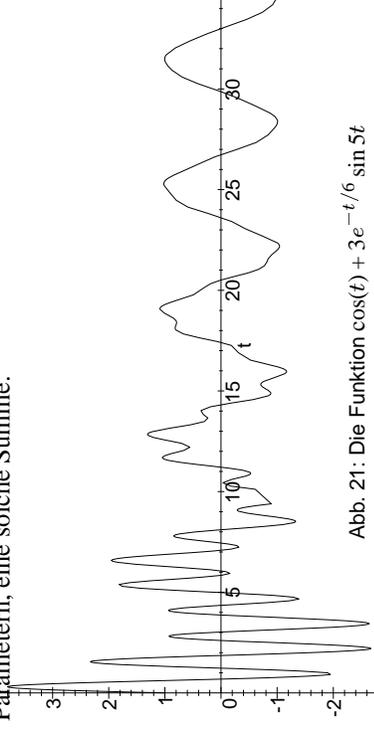


Abb. 21: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t}/6 \sin 5t$

Als zweites Beispiel betrachten wir

$$\dot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 15y(t) = 30 \cos t + 20 \sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Hier führt die LAPLACE-Transformation auf

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 2s - 1 + 8(sY(s) - 2) + 15Y(s) \\ = (s^2 + 8s + 15)Y(s) - 2s - 17 = \frac{30s + 20}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

oder

$$Y(s) = \frac{2s + 17}{s^2 + 8s + 15} + \frac{30s + 20}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)}.$$

Wieder ist für den zweiten Summanden eine Partialbruchzerlegung notwendig.

$$\begin{aligned} \frac{30s + 20}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)} &= \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{(s^2 + 8s + 15)} \\ &= \frac{(as + b)(s^2 + 8s + 15) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)} \end{aligned}$$

$$= (a + c)s^3 + (8a + b + d)s^2 + (15a + 8b + c)s + 15b + d.$$

Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$a + c = 0, \quad 8a + b + d = 0, \quad 15a + 8b + c = 30 \quad \text{und} \quad 15b + d = 20$$

lösen. Die erste und die letzte Gleichung erlauben auch hier wieder, $c = -a$ und $d = 20 - 15b$ durch a und b auszudrücken; Einsetzen in die beiden mittleren Gleichungen führt auf

$$8a - 14b = -20 \quad \text{und} \quad 14a + 8b = 30,$$

was sich zu

$$4a - 7b = -10 \quad \text{und} \quad 7a + 4b = 15$$

kürzen läßt. Vier mal erste plus sieben mal zweite Gleichung ergibt $65a = 65$ oder $a = 1$, also ist $b = 2, c = -1$ und $d = -10$. Somit ist

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 17}{s^2 + 8s + 15} + \frac{s + 2}{s^2 + 1} - \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 15} \\ &= \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 7}{(s + 4)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Auch hier ist für den zweiten Summanden eigentlich wieder eine Partialbruchzerlegung notwendig, allerdings läßt sie sich in diesem Falle auch umgehen: Wegen der Linearität der LAPLACE-Transformation ist nämlich

$$\mathcal{L}\{\cosh \lambda t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \lambda} + \frac{1}{s + \lambda}\right) = \frac{s}{s^2 - \lambda^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\sinh \lambda t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \lambda} - \frac{1}{s + \lambda}\right) = \frac{\lambda}{s^2 - \lambda^2}.$$

Kombinieren wir dies mit der Regel, daß Multiplikation mit einer Exponentialfunktion das Argument verschiebt, erhalten wir über die Zerlegung

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 4}{(s + 4)^2 - 1} + \frac{3}{(s + 4)^2 - 1}$$

als Funktion mit Laplace-Transformation $Y(s)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos t + 2 \sin t + e^{-4t} (\cosh t + 3 \sinh t) \\ &= \cos t + 2 \sin t + \frac{e^{-3t} + e^{-5t} + 3e^{-3t} - 3e^{-5t}}{2} \\ &= \cos t + 2 \sin t + 2e^{-3t} - e^{-5t}. \end{aligned}$$

Auch hier setzt sich also die anregende Schwingung durch.

Als letztes Beispiel betrachten wir

$$\ddot{y}(t) + 25y(t) = \cos 5t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

LAPLACE-Transformation führt auf

$$s^2 Y(s) - s + 25Y(s) = \frac{s}{s^2 + 25} \quad \text{oder} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2 + 25} + \frac{s}{(s^2 + 25)^2}.$$

Der erste Summand ist einfach die LAPLACE-Transformierte von $\cos 5t$; der zweite ist uns bislang noch nicht begegnet.

Wenn wir daran denken, daß die Quotientenregel der Differentiation das Quadrat des Nenners der abgeleiteten Funktion im Nenner hat, liegt

es nahe, mit der Ableitung der LAPLACE-Transformierten des Sinus zu vergleichen:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{-2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} = -2\omega \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

Wie wir aus Abschnitt b) wissen, ist die Ableitung der LAPLACE-Transformierten einer Funktion gleich der LAPLACE-Transformierten der $-t$ -fachen Funktion. In unserem Fall folgt

$$\mathcal{L}\{t \sin \omega t\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

und speziell

$$\mathcal{L}\{t \sin 5t\}(s) = \frac{10s}{(s^2 + 25)^2}.$$

Somit ist hier die Lösung gleich

$$y(t) = \cos 5t + \frac{t}{10} \sin 5t.$$

Der zweite Term ist eine Schwingung mit linear ansteigender Amplitude; wie die obige Rechnung zeigt, kommt er daher, daß die Eigenfrequenz der linken Seite gleich der anregenden Frequenz auf der rechten Seite ist. Da unbegrenzt wachsende Amplituden nichts gutes bedeuten, redet man hier von der sogenannten *Resonanzkatastrophe*. Abbildung 22 zeigt ein Beispiel.

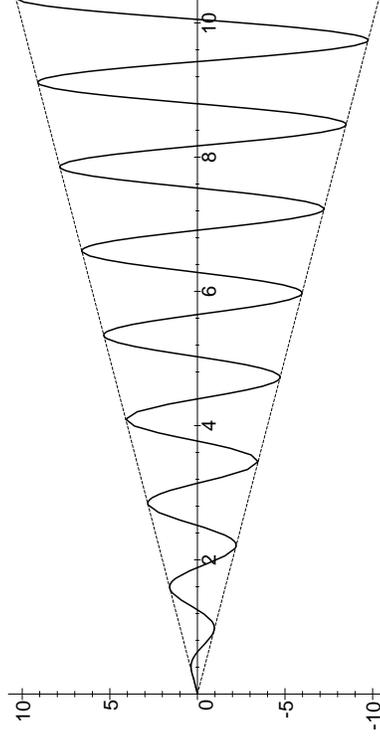


Abb. 22: Die Funktion $t \sin 5t$

Nach diesen Beispielen wollen wir auch das Anfangswertproblem dieses Abschnitts systematisch betrachten, allerdings sei die rechte Seite der Einfachheit halber als eine reine Kosinusfunktion der Form $A_0 \cos \omega_0 t$ angenommen. Wir betrachten somit das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho \dot{y}(t) + \sigma y(t) = c \cos \omega_0 t \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma) \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s y_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{cs}{s^2 + \omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{s y_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} + \frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)}.$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung des im vorigen Abschnitt betrachteten Anfangswertproblems. Für den zweiten Summanden brauchen wir, wie im obigen Beispiel, eine Partialbruchzerlegung: Falls die beiden Faktoren des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s + \beta)(s^2 + \rho s + \sigma) + (\gamma s + \delta)(s^2 + \omega_0^2) \\ &= (\alpha + \gamma)s^3 + (\beta + \alpha\rho + \delta)s^2 + (\beta\rho + \alpha\sigma + \gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma + \delta\omega_0^2, \end{aligned}$$

also auf das lineare Gleichungssystem

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \rho\beta + \delta = 0, \quad \sigma\alpha + \rho\beta + \omega_0^2\gamma = c \quad \text{und} \quad \sigma\beta + \omega_0^2\delta = 0.$$

Aus der ersten und der letzten Gleichung erhalten wir die Beziehungen

$$\gamma = -\alpha \quad \text{und} \quad \delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta;$$

damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha + \rho\beta = c.$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2} - 1}{\rho} \cdot \beta = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho \omega_0^2} \cdot \beta,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{(\sigma - \omega_0^2)^2}{\rho \omega_0^2} + \rho \right) \beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{(\sigma - \omega_0^2)^2}{\rho \omega_0^2} + \rho} = \frac{c \rho \omega_0^2}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2 \omega_0^2}.$$

Damit sind auch α , γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho \omega_0^2} \cdot \beta = \frac{c(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2 \omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2} \beta = \frac{-c \rho \sigma}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2 \omega_0^2}.$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2} \right) \beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2) \alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta = \delta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = -\gamma = \frac{c}{\sigma - \omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind.

Für $\sigma = \omega_0^2$ wird die zweite Gleichung zu $0 \cdot \alpha = c \neq 0$ und damit unlösbar; das ist nicht weiter verwunderlich, denn das entspricht dem Fall, daß im obigen Ansatz zur Partialbruchzerlegung die beiden Nenner gleich sind, was natürlich nicht funktionieren kann.

In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen α , β , γ , δ , so daß

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L} \left\{ \alpha \cos \omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right\} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s - \frac{\rho}{2} \right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von $\sigma - \frac{\rho^2}{4}$ ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz $\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$ oder abfallende Exponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0 , im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle, und einer Funktion, die für $t \rightarrow \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich, wie in Abbildung 21 zeigt die erregende Frequenz durch.

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß beide Nenner gleich sind, d.h. $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir, wie im letzten der konkreten Beispiele dieses Abschnitts, eine Funktion finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

ist. Dort haben wir gesehen, daß

$$\mathcal{L}\{t \sin \omega t\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

ist, also folgt

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \mathcal{L} \left\{ \frac{c}{2\omega_0} \cdot t \sin \omega_0 t \right\} (s),$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst: Er führt auf die bereits im letzten der konkreten Beispiele aufgetretene *Resonanzkatastrophe*: Die erreichte Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma - \omega_0)^2 + \rho^2 \omega_0^2,$$

werden also umso größer, je näher σ bei ω_0^2 liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm ρ , daß der Nenner je wirklich verschwindet. Bei kleinem ρ kann die Resonanz bei und um $\sigma = \omega_0^2$ allerdings in der Praxis trotzdem problematisch und in Extremfällen (z.B. bei Brücken) sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde. Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines *konkreten* Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen. Wir werden daher im nächsten Kapitel alternative Methoden kennenlernen, die mehr über die Struktur der Lösungen von Differentialgleichungen aussagen.

§7: Die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum

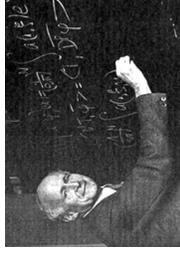
a) Der Schwartz-Raum der stark abfallenden Funktionen

Wie die Beispiele aus §5 zeigen, ist die Existenz von FOURIER- und LAPLACE-Integralen alles andere als sicher. In diesem Abschnitt wollen wir eine Klasse von Funktionen betrachten, für die es garantiert keine Probleme gibt, und wir wollen für diese Funktionen weitere Eigenschaften von FOURIER- und LAPLACE-Transformation herleiten. Im nächsten Paragraphen werden wir diese Ergebnisse verallgemeinern auf die Funktionen, die uns wirklich interessieren.

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend*, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist und die Funktionen

$$t \mapsto \left| t^r f^{(k)}(t) \right|$$

für alle $k, r \geq 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichnen wir als SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.



LAURENT SCHWARTZ (1915–2002) wurde in Paris geboren, studierte zunächst an der dortigen Ecole Normale Supérieure, dann an der Universität Straßburg. 1945 wurde er Professor in Nancy und entwickelte dort die mathematische Theorie der bislang nur von Physikern wie DIRAC und HEAVISIDE betrachteten Distributionen. Für diese Arbeiten wurde er 1950 mit der Fields Medal ausgezeichnet, dem bedeutendsten Preis in der Mathematik. Von 1953 bis zu seiner Emeritierung 1983 lehrte er in Paris, bis 1980 an der Ecole Polytechnique, dann an der Universität Paris VII.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist daher ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Beispiele: a) Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form $P(t)e^{-t^2}$ mit einem geeigneten Polynom P . Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht e^{-t^2} schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen Null und ist daher auf ganz \mathbb{R} beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \\ e^{\frac{1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t \rightarrow a$ oder $t \rightarrow b$ erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar.

Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a, b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: a) Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)} dt.$$

b) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt;$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

c) Die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \end{array} \right.$$

macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITESchen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1 + t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= \lim_{a,b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan(-a)) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über f , so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch b) bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ bzw. $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = |f(t) \cdot e^{-i\omega t}| \leq \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = |g(\omega) \cdot e^{i\omega t}| \leq \frac{C}{1+\omega^2}.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $|t^2 f(t)\overline{f(t)}|$ und damit $(1 + t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$. Für beliebiges $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und beliebige reelle Zahlen $a \leq b$ gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus [HMI], Kap. I, §6c)

$$\left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)\overline{f(t)}| dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(t)\overline{g(t)}| dt},$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für $a \rightarrow -\infty$ und $b \rightarrow \infty$.

Die Eigenschaften eines HERMITESchen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt

dies genauso wie in [HMI], Kap. I, §6a) für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. ■

Da mit einer Funktion f auch alle deren Ableitungen sowie ihre Produkte mit Polynomen stark abfallend sind, gelten im übrigen auch die Formeln aus dem letzten Paragraphen über FOURIER-Transformationen und Ableitungen, ohne daß wir uns über die dort notwendigen, für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum aber automatisch erfüllten Zusatzvoraussetzungen Gedanken machen müssen.

b) Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion

Ein wesentliches Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis, daß zumindest auf dem SCHWARTZ-Raum die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für eine spezielle Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich $f(t) = e^{-t^2}$ und $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a, b) und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2 ; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 23 zeigt die Kurven für $\sigma = 1/2$ (gepunktet), $\sigma = 1$ (ausgezogen) und $\sigma = 2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ , wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung und Statistik werden uns am Ende des Semesters noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

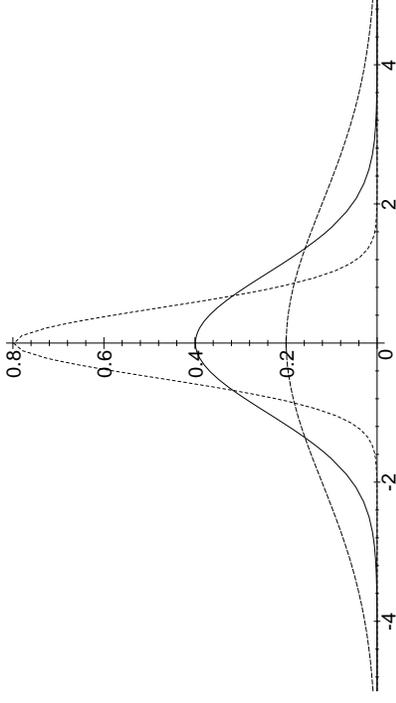


Abb. 23: Gaußkurven für $\sigma = \frac{1}{2}, 1$ und 2

Nach Definition ist

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\hat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i) \cdot t \hat{f}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2} + i\omega\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} \right) = (t + i\omega\sigma^2) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + i\omega\sigma^2) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -i\omega\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt.$$

Die Ableitung von $\hat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\omega\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -\omega\sigma^2 \cdot \hat{f}(\omega).$$

Somit ist $\hat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dg}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2 \cdot g(\omega).$$

Diese Differentialgleichung hat offensichtlich die Nullfunktion als eine ihrer Lösungen; falls sie auch eine Lösung $g(\omega)$ hat, die nicht für alle Werte von ω verschwindet, können wir zumindest in der Umgebung solcher Werte durch $g(\omega)$ dividieren und erhalten

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = -\omega\sigma^2.$$

Da die Ableitung der Logarithmusfunktion die Funktion $1/x$ ist, zeigt die Kettenregel, daß die linke Seite dieser Gleichung die Ableitung von $\ln g(\omega)$ ist. Durch Integration beider Seiten folgt

$$\ln g(\omega) = -\frac{\omega^2\sigma^2}{2} + C \implies g(\omega) = e^C e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

Somit ist $\hat{f}(\omega)$ ein konstantes Vielfaches von $e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$, d.h.

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0) \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

In [HM1], Kap. 2, §6c) hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution $u = t/\sqrt{2}\sigma$ folgt daraus sofort

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)} e^{-\frac{\omega^2}{2 \cdot (1/\sigma)^2}},$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_{\sigma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\hat{N}_{\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} N_{1/\sigma}(\omega).$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{N}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega).$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{N}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\sigma}}} N_\sigma(t) = N_\sigma(t).$$

Genauso zeigt man, daß auch $\check{N}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$ ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

c) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases}.$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\check{f}}(t) = f(t).$$

Für das HERMITESche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)} d\omega,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\check{f}\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob \hat{f} und \check{g} stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die

Produkte $\omega^r \hat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\begin{aligned} \left| \omega^r \hat{f}(\omega) \right| &= \left| (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) e^{-i\omega t} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(r)}(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r \widehat{f^{(k)}}(\omega) = \omega^r (-i)^k \widehat{f^{(k+r)}}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für \check{g} .

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\check{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\check{f}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) e^{i\omega t} g(\omega) d\omega,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega(s-t)} d\omega \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \check{g}(s-t) ds.$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega) = h(a\omega)$, wobei die Funktion $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu = a\omega$ auf

$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega)e^{-i\omega s} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu \frac{s}{a}} \frac{d\nu}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu \frac{s}{a}} d\nu = \frac{1}{a} \widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

Nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} h(a\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \frac{1}{a} \cdot \widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right) ds.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s = t + au$, und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} h(a\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au) \cdot \widehat{h}(u) du.$$

Beide Seiten sind stetig in a ; für $a \rightarrow 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} h(0) d\omega = h(0) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \cdot h(0) \cdot \check{f}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \widehat{h}(u) du = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(u) du = 2\pi \cdot f(t) \cdot \check{h}(0).$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0) \cdot \check{f}(t) = f(t) \cdot \check{h}(0).$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß \check{h} und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega = 0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{f}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{\check{f}}(\omega) = 2\pi \check{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\widehat{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi f(-(-\omega)) = f(\omega).$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITESCHE Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right) g(\omega) d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t) dt,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t) dt. \quad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITESCHE Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \check{f}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-t) \quad (**)$$

und

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(t)} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(t)} e^{i\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(-t)} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(-t)} e^{-i\omega t} dt \\ &= \widehat{\overline{\widehat{g}}}(-\omega), \end{aligned} \quad (***)$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{\widehat{g}}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{\widehat{g}(t)} = \widehat{g}(t)$ zuordnet; entsprechend ist $\widehat{\overline{\widehat{g}}}(t) = \widehat{\widehat{g}}(t)$.

Damit läßt sich das HERMITESCHE Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\widehat{g}(t)} dt \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t) \widehat{\widehat{g}}(-t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t) \widehat{\widehat{g}}(-t) dt \stackrel{(***)}{=} \frac{1}{4\pi^2} \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \widehat{g}(-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \overline{\widehat{g}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f}, \widehat{g}). \end{aligned}$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f}, \check{g}) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{\widehat{f}}, \widehat{\widehat{g}}) = \frac{1}{2\pi} (f, g). \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITESCHE Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

§8: Die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, verhält sich die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum genau so, wie wir es erwarten. Leider sind aber die Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum für die meisten Anwendungen zu schön, um nützlich zu sein. Wir brauchen daher einen größeren Funktionenraum, auf dem wir die FOURIER-Transformation immer noch gut verstehen können. Darum geht es in diesem Paragraphen.

a) Quadratintegrierbare Funktionen

Definition: Eine integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *quadratintegrierbar*, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

existiert und konvergiert. Der Vektorraum aller quadratintegrierbarer Funktionen wird mit $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Nach Aussage c) des ersten Lemmas aus §7a) ist jede stark abfallende Funktion quadratintegrierbar, d.h. der SCHWARTZ-Raum $S(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Er ist allerdings deutlich kleiner als $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn beispielsweise ist auch jeder Rechteckimpuls quadratintegrierbar und allgemeiner jede stückweise stetige Funktion, die außerhalb eines endlichen Intervalls $[a, b]$ identisch verschwindet. Auch Funktionen wie $e^{-|t|}$ liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|t|}|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 1.$$

Funktionen wie $\sin \omega t$ sind natürlich nicht quadratintegrierbar; aber bei periodischen Funktionen betrachtet man ohnehin sinnvollerweise nur Integrale über eine Periode, nicht solche über die gesamte reelle Achse. (Das ist der aus der Elektrotechnik bekannte Unterschied zwischen Energie- und Leistungssignalen; die Energiesignale sind genau die quadratintegrierbaren.)

Auf dem SCHWARTZ-Raum haben wir ein HERMITESCHES Produkt, bezüglich dessen wir das Integral über $|f|^2$ kurz als $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ schreiben können; wir wollen uns als nächstes überlegen, daß zumindest die Definition

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

auch für $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sinnvoll ist:

Da $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist nach der binomischen Formel auch

$$|f(t)| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{2} (|f(t)|^2 + |g(t)|^2),$$

also

$$\int_N^M |f(t)g(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_N^M f(t) \overline{g(t)} dt + \frac{1}{2} \int_N^M g(t) \overline{f(t)} dt$$

für alle $N \leq M \in \mathbb{R}$. Rechts konvergieren beide Integrale für $N \rightarrow -\infty$ und $M \rightarrow \infty$, also auch links, und damit konvergiert das Integral zu $\langle f, g \rangle$ sogar absolut.

Es hat alle Eigenschaften eines HERMITESCHEN Produkts mit Ausnahme der positiven Definitheit – genau wie wir es vom periodischen Fall her gewohnt sind. Wie dort bezeichnen wir

$$\|f\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

kurz, wenn auch schlampig als L^2 -Norm von f , denn – wie schon bei den periodischen Funktionen – können die Funktionen $f \neq 0$ mit $\|f\|_2 = 0$ für die meisten Anwendungen *praktisch* vernachlässigt werden.

Definition: $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ heißt *Nullfunktion*, wenn $\|f\|_2 = 0$ ist.

Nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung, die wir in [HMI], Kap. I, §6c) aus gutem Grund auch für Produkte bewiesen haben, die nur bis auf die positive Definitheit HERMITESCH sind, ist dann für eine beliebige Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = 0,$$

für eine Nullfunktion f verschwindet also jedes Produkt $\langle f, g \rangle$, und umgekehrt ist auch jede Funktion mit dieser Eigenschaft eine Nullfunktion, denn $\|f\|_2$ ist ja die Wurzel aus $\langle f, f \rangle$.

b) Distributionen auf dem Schwartz-Raum

Jede quadratintegrierbare Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definiert eine lineare Abbildung

$$\tilde{T}_f: \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt \end{cases}$$

Man beachte, daß hier trotz der komplexwertigen Funktionen keine komplexe Konjugation steht! Vergleich mit dem Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

zeigt, daß

$$\tilde{T}_f(g) = \langle f, \bar{g} \rangle = \langle g, \bar{f} \rangle$$

ist. Insbesondere ist \tilde{T}_f genau dann gleich der Nullabbildung, wenn f eine Nullfunktion ist.

Da der SCHWARTZ-Raum ein Untervektorraum von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist, können wir \tilde{T}_f auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ einschränken und die lineare Abbildung

$$T_f: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt \end{cases}$$

betrachten. Mit Hilfe dieser Abbildung wollen wir im folgenden Eigenschaften von f und seiner FOURIER-Transformierten (über deren Existenz wir noch nichts wissen) auf Eigenschaften stark abfallender Funktionen zurückführen.

Die Abbildung T_f existiert nicht nur für quadratintegrierbare Funktionen f , sondern allgemeiner für *jede* Funktion, deren Betrag höchstens polynomial ansteigt:

Lemma: Falls es zu einer stückweise stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Konstanten $k \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß

$$|f(t)| \leq c \cdot |t|^k$$

ist, existiert $T_f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $t^\ell \varphi(t)$ beschränkt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also für $\ell = k$ und $\ell = k + 2$. Damit ist auch deren Summe beschränkt, es gibt also eine Konstante $M > 0$, für die

$$\left| t^k (1 + t^2) \varphi(t) \right| = \left| t^k \varphi(t) + t^{k+2} \varphi(t) \right| \leq M$$

ist. Damit folgt

$$\left| (1 + t^2) f(t) \varphi(t) \right| \leq \left| (1 + t^2) c t^k \varphi(t) \right| \leq cM$$

und

$$|f(t)\varphi(t)| \leq \frac{cM}{1+t^2}.$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cM}{1+t^2} dt = cM \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = cM\pi$$

konvergiert, ist auch das Integral $T_f(\varphi)$ über die linke Seite der Gleichung absolut konvergent. ■

Außerdem hat T_f eine Stetigkeitseigenschaft, die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner formulieren wollen:

Lemma: $\varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $f, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ seien Funktionen derart, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

existieren. Außerdem sei f beschränkt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt.$$

Beweis: Ist $|f(t)| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt \right| & \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt \\ & \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt, \end{aligned}$$

und letztere ist das M -fache einer Nullfolge, also selbst Nullfolge. ■

Wir wollen dies anwenden auf Funktionen φ aus dem SCHWARTZ-Raum und Funktionen f , die höchstens polynomial ansteigen, die aber nicht notwendigerweise beschränkt sind. Um das zu kompensieren, führen wir für Folgen aus dem SCHWARTZ-Raum einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, wobei wir (wie schon bei der Definition einer stark abfallenden Funktion) gleich so viel wie nur irgendwie möglich fordern:

Definition: Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn für alle $r, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k (\varphi^{(r)}(t) - \varphi_n^{(r)}(t))| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir fordern also, daß *alle* Produkte von t -Potenzen und Ableitungen von φ_n gegen die entsprechende Konstruktion für φ konvergieren. Unter dieser extrem starken Voraussetzung verwundert nicht

Lemma: f sei eine stückweise stetige Funktion, die einer Abschätzung der Form $|f(t)| \leq ct^k$ genüge. Dann ist für jede gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi).$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie beim Beweis der Existenz von $T_f(\varphi)$: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^\ell (\varphi(t) - \varphi_n(t))|$$

eine Nullfolge, es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^\ell (\varphi(t) - \varphi_n(t))| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Insbesondere gibt es solche Werte für $\ell = k$ und für $\ell = k + 2$, und damit gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k (1 + t^2)(\varphi(t) - \varphi_n(t))| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N,$$

d.h.

$$|t^k (\varphi(t) - \varphi_n(t))| < \frac{\varepsilon}{1 + t^2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)(\varphi(t) - \varphi_n(t))| dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |ct^k (\varphi(t) - \varphi_n(t))| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\varepsilon}{1 + t^2} dt = c\pi \cdot \varepsilon$$

für alle $n > N_0$. Da c und π konstant sind und wir ε beliebig klein machen können, folgt die Behauptung. ■

Definition: Eine *Distribution* auf dem SCHWARTZ-Raum ist eine lineare Abbildung $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, so daß für jede gegen ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi).$$

Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist also T_f für jede stückweise stetige Funktion f , die nicht stärker als ein Polynom wächst, eine Distribution auf dem SCHWARTZ-Raum.

Das sind allerdings bei weitem noch nicht alle Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum: Beispielsweise ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch

$$\Delta_a: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

eine Distribution: Die Linearität ist klar, und für eine gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n ist insbesondere

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

eine Nullfolge, erst recht also $|\varphi(a) - \varphi_n(a)|$, so daß es auch mit der Stetigkeit keine Probleme gibt.

Diese Distribution bezeichnet man als DIRACSche Delta-Distribution. Nicht ganz korrekt spricht man auch von einer DIRACSchen Delta-Funktion und schreibt, gerade so als sei Δ_a von der Form T_δ ,

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt \quad \text{und} \quad \Delta_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)f(t) dt.$$

Die Schreibweise $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)f(t) = f(a)$ findet man nicht nur für Funktionen f aus dem SCHWARTZ-Raum, sondern oft auch für beliebige stetige Funktionen f .



PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Stipendiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge. Nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Wenn es wirklich eine *Funktion* $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gäbe, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

wäre für jede (stark abfallende oder auch einfach stetige) Funktion f , so müßte $\delta(t)$ für $t \neq 0$ verschwinden – abgesehen eventuell von einigen isolierten Punkten, die für die Integration bedeutungslos sind. Damit müßte aber unabhängig vom Funktionswert $\delta(0)$ und unabhängig von der Funktion f das Integral verschwinden.

Die „Lösung“, $\delta(0) = \infty$ zu setzen, führt nicht zu einer sinnvollen Interpretation des linksstehenden Integrals, denn wenn man einen Ausdruck wie $2 \cdot \infty$ überhaupt sinnvoll interpretieren kann, dann wohl nur im Sinne von $2 \cdot \infty = \infty$, und damit wäre $2\delta(t) = \delta(t)$, obwohl die Distributionen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(0) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto 2\varphi(0) \end{cases}$$

wohldefiniert und offensichtlich verschieden sind.

Die Schreibweise mit einer „Funktion“ δ ist also in mehrfacher Hinsicht problematisch, hat sich aber gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden. Man sollte sich aber klar machen, daß man nur Ausdrücke wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - x) f(t) dt = f(x)$$

sinnvoll interpretieren kann, in anderen Zusammenhängen hat $\delta(t)$ keine vernünftige Bedeutung.

Problemlos unter einem Integralzeichen sind auch Linearkombinationen der Art

$$\sum_{k=1}^n a_k \delta(t - t_k),$$

denn Linearkombinationen von Distributionen sind wieder Distributionen. Im vorliegenden Fall wäre dies die Distribution

$$\sum_{k=1}^n a_k \Delta_{t_k},$$

für eine stark abfallende Funktion φ ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \delta(t - t_k) \right) \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_{t_k}(\varphi) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi(t_k),$$

und da man zumindest die DIRAC-Distribution auch einfach als lineare Abbildung auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ betrachtet, kann man dies auch für eine beliebige stetige Funktion φ sinnvoll interpretieren. So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 1) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t.$$

Da wir nur Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum betrachten, sind auch viele unendliche Linearkombinationen wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \Delta_k$$

wohldefiniert, denn für eine stark abfallende Funktion φ konvergieren sowohl

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) \quad \text{als auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \varphi(k).$$

Wir können eine Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum nicht nur mit Konstanten multiplizieren, sondern allgemeiner auch mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion g , die höchstens polynomiales Wachstum hat: Für eine Distribution der Form T_f ist

$$T_{gf}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (g(t) \varphi(t)) dt = T_f(g\varphi),$$

da auch $g\varphi$ eine stark abfallende Funktion ist. Somit können wir für eine beliebige Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum das Produkt

$$gT: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(g\varphi) \end{cases}$$

definieren. Beispielsweise gehört $t\delta(t)$ zur Distribution

$$t\Delta_0: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \Delta_0(t\varphi) = (t\varphi)(0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0, \end{cases}$$

d.h. $t\delta = 0$. Man überlegt sich leicht, daß für jede Funktion g wie oben gilt $g\delta = g(0)\delta$.

Problematischer ist die Definition eines Produkts von Distributionen: Die obige Rechnung drückt T_{gf} aus durch T_f und g , nicht aber durch T_f und T_g , wie wir es bräuchten, um ein Produkt zweier Distributionen zu definieren. Auch sonstige Versuche, den Ausdruck $T_{gf}(\varphi)$ umzuformen, führen nicht zu brauchbareren Ergebnissen, und in der Tat kann man in der Theorie der Distributionen ein Produkt nur als Linearform auf dem

SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen *zweier* Veränderlicher definieren. Dieser Raum wird weiter hinten zwar kurz erwähnt werden, es würde aber zu weit führen, ihn wirklich zu behandeln. Wir wollen daher nur festhalten, daß Produkte von δ -, Funktionen“ nicht sinnvoll als Distributionen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert werden können und.

Ähnlich ist es mit Ausdrücken der Form $e^{\delta(t)}$ oder $\sin \delta(t)$: Da beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} \varphi(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\varphi(t)} dt$$

nichts miteinander zu tun haben (und $e^{\varphi(t)}$ nicht einmal eine stark abfallende Funktion ist), können wir hier nicht einfach die Exponentialfunktion ins Argument von T_f schieben, und es ist gibt auch keine sonstige Art und Weise, Ausdrücken wie $e^{\delta(t)}$ oder $\sin \delta(t)$ einen Sinn zu geben. Bei der Funktionsschreibweise von Distributionen muß man sich also stets sorgfältig überlegen, ob ein gegebener Ausdruck wirklich sinnvoll interpretiert werden kann oder nicht.

c) Die Fourier-Transformierte einer Distribution

f sei eine absolut integrierbare Funktion, d.h. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

konvergiere gegen einen endlichen Wert. Dann ist auch $f(t)e^{-i\omega t}$ absolut integrierbar, da diese Funktion den gleichen Betrag hat wie $f(t)$, und damit konvergiert auch das FOURIER-Integral

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

absolut. Da Multiplikation des Integranden mit einer stark abfallenden Funktion φ nichts an der absoluten Integrierbarkeit ändert, ist auch die

lineare Abbildung

$$T_{\widehat{f}}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\varphi(t) dt \end{cases}$$

wohldefiniert, und nach dem Satz von FUBINI gilt für alle stark abfallenden Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T_{\widehat{f}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \varphi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right) \varphi(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t) dt = T_f(\widehat{\varphi}). \end{aligned}$$

Dies legt folgende Definition nahe:

Definition: Die FOURIER-Transformierte der Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\widehat{T}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\widehat{\varphi}) \end{cases};$$

die inverse FOURIER-Transformierte von T ist

$$\check{T}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\check{\varphi}) \end{cases}.$$

Zunächst müssen wir uns überlegen, ob das überhaupt sinnvoll ist:

Lemma: Für eine Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ sind auch $\widehat{\widehat{T}}$ und $\check{\check{T}}$ wieder Distributionen und $\check{\widehat{T}} = \widehat{\check{T}} = T$.

Beweis: Die letzte Aussage folgt sofort aus den Definitionen sowie der entsprechenden Aussage für stark abfallende Funktionen in §7c). Auch die Linearität von \widehat{T} ist klar, da die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum eine lineare Operation ist, d.h. die FOURIER-Transformierte von $\lambda\varphi + \mu\psi$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist $\lambda\widehat{\varphi} + \mu\widehat{\psi}$. ■

Für die Stetigkeit von \widehat{T} genügt es wegen der Stetigkeit von T , wenn wir zeigen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit Grenzwert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch die Folge der FOURIER-Transformierten $\widehat{\varphi}_n$ gegen $\widehat{\varphi}$ konvergiert. Wir müssen also zeigen, daß für je zwei Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \omega^k \widehat{\varphi}_n^{(r)}(\omega) - \omega^k \widehat{\varphi}^{(r)}(\omega) \right| = 0.$$

Nach den Formeln aus §6b) ist

$$\begin{aligned} \omega^k \widehat{\varphi}^{(r)}(\omega) &= \omega^k \cdot (-i)^r \widehat{t^r \varphi}(\omega) = (-i)^r \cdot \omega^k \widehat{t^r \varphi}(\omega) \\ &= (-i)^r \cdot (-i)^k \widehat{\psi}(\omega) = (-i)^{r+k} \widehat{\psi}(\omega) \quad \text{mit } \psi = \frac{d^k}{dt^k} (t^r \varphi(t)). \end{aligned}$$

Durch k -fache Anwendung der Produktregel folgt, daß ψ Linearkombination von Termen der Form $t^\ell \varphi^{(s)}$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung reicht es also, zu zeigen, daß für alle $\ell, s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| t^\ell \widehat{\varphi}_n^{(s)}(\omega) - t^\ell \widehat{\varphi}^{(s)}(\omega) \right| = 0.$$

Nach Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt es zu ℓ, s und jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_1$ gilt

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Genauso gibt es auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_2$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^{\ell+2} \varphi_n^{(s)}(t) - t^{\ell+2} \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; für n größer oder gleich dem Maximum N_0 von N_1 und N_2 gilt also

$$\begin{aligned} \left| \widehat{t^\ell \varphi_n^{(s)}}(\omega) - \widehat{t^\ell \varphi^{(s)}}(\omega) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t)) e^{-i\omega t} dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{1+t^2} \quad \text{und} \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right| dt \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \varepsilon\pi, \end{aligned}$$

der Limes für $n \rightarrow \infty$ ist also gleich null, wie behauptet. ■

Um zu sehen, was die neue Definition bringt, wollen wir die FOURIER-Transformierte des Sinus berechnen: Im klassischen Sinne als

$$\widehat{\sin} \omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot e^{-i\omega t} dt$$

existiert sie bekanntlich nicht. Im Distributionensinne ist

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\sin}(\varphi) &= T_{\sin}(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega \widehat{\varphi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \widehat{\varphi}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega} d\omega - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{-i\omega} d\omega \\ &= \frac{2\pi}{2i} (\check{\varphi}(1) - \check{\varphi}(-1)) = -\pi i (\varphi(1) - \varphi(-1)), \end{aligned}$$

denn für jede Funktion g ist

$$\check{g}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega} d\omega \quad \text{und} \quad \check{g}(-1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega} d\omega.$$

Für die oben eingeführte DIRAC-Distribution gilt

$$\Delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) \varphi(t) dt = \varphi(a),$$

und damit ist

$$\widehat{T}_{\sin} = -\pi i (\Delta_1 - \Delta_{-1}) = \pi i (\Delta_{-1} - \Delta_1).$$

Kurz, wenn auch etwas kriminell, können wir dies als

$$\widehat{\sin}(\omega) = \pi i (\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1))$$

schreiben.

Falls diese Rechnung auf ein sinnvolles Ergebnis führte, sollte

$$\sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\sin} \omega \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

sein, und in der Tat ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\pi i) (\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)) e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 1) e^{i\omega t} d\omega + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 1) e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{i}{2} (e^{it} - e^{-it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t. \end{aligned}$$

d) Der Satz von Riesz

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, daß die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der Distributionen weitgehend unproblematisch ist. Was uns wirklich interessiert, sind aber Aussagen über die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der *Funktionen*; wir müssen also wissen, wie wir von Distributionen wieder zurückkommen zu Funktionen. Wie das Beispiel der DIRAC-Distribution zeigt, ist das nicht immer möglich; wir müssen uns daher als erstes überlegen, was Distributionen der Form T_f mit $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auszeichnet.

Betrachten wir dazu für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ zunächst die lineare Abbildung

$$\widehat{T}_f: \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt \end{cases}.$$

Wie im Fall von T_f rechnet man auch hier schnell nach, daß \widehat{T}_f der Stetigkeitsbedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{T}_f(g_n) = \widehat{T}_f(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n)$$

genügt, hier allerdings für bezüglich der L^2 -Norm konvergente Folgen (g_n) .

Außerdem ist nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung

$$|T_f(g)| = |(f, \overline{g})| \leq \|f\|_2 \cdot \|\overline{g}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

für jede Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ läßt sich $|T_f(g)|$ also abschätzen durch ein von g unabhängiges Vielfaches der L^2 -Norm von g .

Diese Eigenschaft hat nicht jede stetige lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nach \mathbb{C} : Beispielsweise ist für die Fortsetzung

$$\tilde{\Delta}_0: \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto g(0) \end{cases}$$

der DIRAC-Distribution Δ_0 auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und den Rechteckimpuls

$$g_a: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

die L^2 -Norm unabhängig von a gleich

$$\|g_a\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g_a|^2(t) dt} = \sqrt{\int_{-1/a^2}^{1/a^2} a^2 dt} = \sqrt{2},$$

aber $\Delta_0(g_a) = g_a(0) = a$ kann beliebig große Werte annehmen. Hier kann $|\Delta_0(g)|$ also nicht durch ein konstantes Vielfaches von $\|g\|_2$ abgeschätzt werden.

Definition: Eine lineare Abbildung $T: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$|T(g)| \leq c \|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Das Infimum aller Zahlen c , die diese Eigenschaft haben, bezeichnen wir als die *Norm* $\|T\|$ von T .

Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist \tilde{T}_f also beschränkt und hat die Norm $\|f\|_2$, denn wie wir gerade gesehen haben, ist $|\tilde{T}_f(g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ für alle g , und speziell für $g = \bar{f}$ ist $|\tilde{T}_f(g)| = (f, \bar{f}) = (f, f) = \|f\|_2^2$.

Das Schöne an quadratintegrierbaren Funktionen ist, daß sich diese Aussage auch umkehren läßt: Zu jeder beschränkten Distribution T gibt es eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß $T = \tilde{T}_f$ ist.

Zum Beweis brauchen wir unter anderem, daß $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bis auf das Problem mit den Nullfunktionen ein HILBERT-Raum ist, d.h.

Lemma: In $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hat jede CAUCHY-Folge einen Grenzwert.

Dieses Lemma ist, so wie wir $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definiert haben, leider falsch; es gilt nur, wenn wir $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ersetzen durch den etwas größeren Raum aller LEBESGUE-integrierbarer Funktionen, für die das Integral über das Betragsquadrat endlich bleibt. Da LEBESGUE-Integrale in dieser Vorlesung nicht definiert wurden, muß also hier eine Lücke bleiben; wo es Probleme gibt, zeigt der

„Beweis“: g_n sei eine CAUCHY-Folge von Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N > 0$, so daß für $n, m \geq N$ gilt

$$\|g_n - g_m\|_2 < \varepsilon.$$

Offensichtlicher Kandidat für eine Grenzfunktion ist jene Funktion g , die jedem Wert t den Limes der $g_n(t)$ zuordnet; leider gibt es aber zunächst keinen Grund, warum diese Folge von Funktionswerten für jedes t konvergieren sollte. Wir müssen daher etwas härter arbeiten.

Wir verschaffen uns zunächst eine Folge von Werten $\varepsilon_\nu > 0$, für die

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu < \infty$$

konvergiert – beispielsweise können wir $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu^2}$ setzen. Da (g_n) eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem dieser ε_ν ein n_ν , so daß

$$\|g_n - g_m\|_2 \leq \varepsilon_\nu \quad \text{für alle } n, m \geq n_\nu.$$

Insbesondere ist also

$$\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \leq \varepsilon_\nu.$$

Damit ist für jede natürliche Zahl k

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=k}^{\infty} \varepsilon_\nu &\geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{\nu=k}^{\ell} \|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\nu=k}^{\ell} (g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}) \right\|_2 \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|g_{n_{\ell+1}} - g_{n_k}\|_2. \end{aligned}$$

Da die linke Seite für $k \rightarrow \infty$ wegen der Konvergenz der Summe der ε_ν gegen null geht, gilt dies auch für die rechte. Daher muß es eine Funktion g geben, die fast überall mit

$$t \mapsto \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_{n_\nu}(t)$$

übereinstimmt und für die

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|g - g_{n_\nu}\|_2 = 0$$

ist. Da alle g_{n_ν} in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegen, zeigt die Dreiecksungleichung, daß auch g dort liegen muß – falls g integrierbar ist. Man kann zeigen, daß g in jedem Fall LEBESGUE-integrierbar ist, auch wenn die g_n ebenfalls nur LEBESGUE-integrierbar sind; g muß aber nicht RIEMANN-integrierbar sein. Eine letzte Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt noch, daß nicht nur die Teilfolge der g_{n_k} , sondern die Folge aller g_n in der L^2 -Norm gegen g konvergiert. ■

Damit kommen wir zum eigentlich interessanten

Satz von Riesz: Zu jeder beschränkten und stetigen linearen Abbildung $T: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß $T = \tilde{T}f$ ist und $\|f\|_2 = \|T\|$. Die Funktion f ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.

Der Beweis ist etwas langwierig, aber seine Grundidee ist einfach:

Angenommen, wir betrachteten anstelle von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ den endlichdimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 und eine lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dann wissen wir natürlich, daß sich $T(\vec{x})$ schreiben läßt als

$$T(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen a_1, a_2 und a_3 . Diese können wir zusammenfassen zu einem Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, für den

$$T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

ist. Dieser Vektor \vec{a} entspricht der gesuchten Funktion f ; er steht offensichtlich senkrecht auf dem Untervektorraum

$$E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = 0 \},$$

der außer für $\vec{a} = \vec{0}$ eine Ebene beschreibt, und er ist durch E bis auf eine Proportionalitätskonstante eindeutig bestimmt.

In Analogie dazu betrachten wir auch für den Satz von RIESZ den Kern

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{ g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid T(g) = 0 \}$$

von T . Falls $N = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist, sind wir fertig: Dann verschwindet $T(g)$ überall, und $f \equiv 0$ erfüllt alle Behauptungen.

Andernfalls gibt es eine Funktion $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, die nicht in N liegt.

Der erste und umständlichste Beweisschritt besteht darin, daß wir uns überlegen, daß es in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus N$ auch eine Funktion \tilde{f} gibt, die auf N senkrecht steht, für die also $(\tilde{f}, g) = 0$ ist für alle $g \in N$.

Dazu betrachten wir den Abstand $d \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \in N} \|h - g\|_2$ von g und h .

Zur Erinnerung: In der Schule definiert man den Abstand eines Punkts von einer Ebene als den Abstand zum nächstgelegenen Punkt der Ebene. Dieser Punkt ist der Fußpunkt des Lots vom gegebenen Punkt auf die Ebene; der Verbindungsvektor steht also senkrecht auf der Ebene. Bei einem unendlichdimensionalen Raum wie N können wir nicht sicher sein, daß es so etwas wie einen „Lotfußpunkt“ gibt – in der Tat besteht die Hauptarbeit des ersten Beweisschritts genau darin, dies zu zeigen. Deshalb können wir (noch) nicht von einem minimalen Abstand reden, sondern müssen uns zunächst mit einem Infimum begnügen. Wir hoffen aber (zu recht, wie sich bald zeigen wird), daß der „Lotfußpunkt“ auch in unserem Fall existiert und daß der „Lotvektor“ senkrecht auf N steht.

Obwohl h nicht in N liegt, können wir zumindest *a priori* nicht sicher sein, daß obiges Infimum positiv ist – wenn wir anstelle einer beschränkten stetigen linearen Abbildung T beispielsweise die stetige lineare Abbildung $\tilde{\Delta}_0$ betrachten würden, wäre $d = 0$.

Da unser T aber beschränkt ist, haben wir eine Konstante $c > 0$, so daß

$$|T(g)| \leq c \|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Insbesondere ist für jedes $g \in N$

$$|T(h)| = |T(h) - T(g)| = |T(h - g)| \leq c \|h - g\|_2.$$

$T(h)$ verschwindet nicht, da h nicht in N liegt; folglich ist

$$\|h - g\|_2 \geq \left| \frac{T(h)}{c} \right| \quad \text{für alle } g \in N.$$

Damit ist auch das Infimum d aller dieser Werte größer oder gleich $|T(h)|/c$, also positiv.

Ein Infimum muß nicht angenommen werden, man kann ihm aber beliebig nahekommen. Somit gibt es eine Folge (g_n) von Funktionen aus N , so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - g_n\|_2 = d$ ist.

Eine (ziemlich langweilige) Abschätzung zeigt, daß diese Folge eine CAUCHY-Folge ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so daß

$$\|g_m - g_n\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_0.$$

Die Einzelheiten seien zum leichteren Überlesen im Kleindruck angegeben:

Zunächst ist für beliebige Funktionen p und q

$$\|p + q\|_2^2 = (p + q, p + q) = (p, p) + (q, q) + (p, q) + (q, p),$$

und

$$\|p - q\|_2^2 = (p - q, p - q) = (p, p) - (q, q) - (p, q) + (q, p),$$

also

$$\|p + q\|_2^2 + \|p - q\|_2^2 = 2 (\|p\|_2^2 + \|q\|_2^2).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|g_m - g_n\|_2^2 &= \|(h - g_m) - (h - g_n)\|_2^2 \\ &= 2 (\|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2) - \|2h - g_m - g_n\|_2^2 \\ &= 2 (\|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2) - 4 \left\| h - \frac{g_m - g_n}{2} \right\|_2^2 \\ &\leq 2 (\|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2) - 4d^2, \end{aligned}$$

denn mit g_m und g_n liegt auch $(g_m + g_n)/2$ in N , hat also mindestens Abstand d von h .

Da für die Folge der g_n die Abstände $\|h - g_n\|_2$ gegen d konvergiert, konvergiert auch die Folge der Abstandsquadrate gegen d^2 , und es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 , so daß

$$\|h - g_n\|_2^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > n_0.$$

Für $n, m > n_0$ ist daher

$$\|g_m - g_n\|_2^2 \leq 2 \left(d^2 + \frac{\varepsilon}{4} + d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \right) - 4d^2 = \varepsilon,$$

wie behauptet.

Da in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nach dem vorigem Lemma jede CAUCHY-Folge konvergiert, folgt daß der Grenzwert

$$\tilde{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ existiert. Da

$$T(\tilde{g}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

ist, liegt \tilde{g} in N .

Die Funktion \tilde{g} entspricht dem „Lotfußpunkt“; der „Lotvektor“

$$\tilde{f} = h - \tilde{g},$$

von dem wir bislang nur wissen, daß $\|\tilde{f}\|_2 = d$ ist, sollte also orthogonal zu N sein.

Für eine beliebige Funktion $g \in N$ und eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$ betrachten wir den Abstand

$$\|h - (\tilde{g} + \lambda g)\|_2.$$

Da $\tilde{g} + \lambda g$ in N liegt, ist dieser Abstand mindestens gleich d , d.h.

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|h - (\tilde{g} + \lambda g)\|_2^2 = \|(h - \tilde{g}) - \lambda g\|_2^2 = \|\tilde{f} - \lambda g\|_2^2 \\ &= (\tilde{f} - \lambda g, \tilde{f} - \lambda g) = \|\tilde{f}\|_2^2 + \lambda^2 \|g\|_2^2 - \lambda(g, \tilde{f}) - \lambda(\tilde{f}, g). \end{aligned}$$

Da $\|\tilde{f}\|_2^2 = d^2$ und $\bar{\lambda} = \lambda$ ist, folgt nach Division durch λ , daß

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \|g\|_2^2 - ((g, \tilde{f}) + (\tilde{f}, g)) = \lambda \|g\|_2^2 - ((g, \tilde{f}) + \overline{(g, \tilde{f})}) \\ &= \lambda \|g\|_2^2 - 2\Re(g, \tilde{f}) \end{aligned}$$

für alle reellen $\lambda \neq 0$. Lassen wir λ , sowohl von links, als auch von rechts, gegen null gehen, folgt also

$$\Re(g, \tilde{f}) = 0.$$

Die Funktion $g \in N$ war beliebig; da mit g auch ig in N liegt, ist daher auch

$$\Re(ig, \tilde{f}) = \Re(i \cdot (g, \tilde{f})) = -\Im(g, \tilde{f}) = 0,$$

also verschwindet auch der Imaginärteil von (g, \tilde{f}) und damit (g, \tilde{f}) selbst. \tilde{f} steht daher in der Tat senkrecht auf allen $g \in N$.

\tilde{f} ist nur bis auf eine Konstante bestimmt; wir wollen uns überlegen, daß

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \cdot \tilde{f}$$

dasjenige Vielfache von \tilde{f} mit $\tilde{T}_f = T$ ist:

Für $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{T}_f(g) &= (g, \tilde{f}) = \left(g, \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \cdot \tilde{f} \right) = \left(g, \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \cdot \tilde{f} \right) \\ &= \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} (g, \tilde{f}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\tilde{T}_f(g) = 0$ für alle $g \in N$ nach Konstruktion von \tilde{f} .

Für ein Vielfaches $\lambda \tilde{f}$ von \tilde{f} ist

$$\tilde{T}_f(\lambda \tilde{f}) = \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} (\lambda \tilde{f}, \tilde{f}) = \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \lambda \|\tilde{f}\|_2^2 = \lambda T(\tilde{f}) = T(\lambda \tilde{f}),$$

auch in diesem Fall stimmen \tilde{T}_f und T also überein. Wegen der Linearität von T und von \tilde{T}_f ist daher

$$\tilde{T}_f(g + \lambda \tilde{f}) = T(g + \lambda \tilde{f}) \quad \text{für alle } g \in N, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Eine beliebige Funktion $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der Form

$$h = \left(h - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f} \right) + \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f}$$

darstellen. Da

$$T\left(h - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f} \right) = T(h) - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} T(\tilde{f}) = T(h) - T(h) = 0$$

verschwindet, liegt der erste Summand in N , und der zweite ist natürlich ein Vielfaches von \tilde{f} . Also läßt sich jede quadratintegrierbare Funktion darstellen als Summe einer Funktion aus N und einem Vielfachen von \tilde{f} , die linearen Abbildungen T und \tilde{T}_f stimmen also überein.

Damit sind wir fast fertig: Wenn $T = \tilde{T}_f$ ist, haben beide Abbildungen natürlich auch dieselbe Norm, und wir wissen bereits, daß \tilde{T}_f dieselbe Norm hat wie f , d.h.

$$\|T\| = \|\tilde{T}_f\| = \|f\|_2. \quad \blacksquare$$



FRIGYES RIESZ (1880–1956) studierte Mathematik in Budapest, Göttingen und Zürich. 1902 promovierte er in Budapest mit einer Arbeit über Geometrie, 1911 wurde er Professor an der damals ungarischen Universität Kolozsvár. Nachdem Kolozsvár 1920 rumänisch wurde, zog er mit der Universität um nach Szeged. 1945 bekam er einen Lehrstuhl an der Universität Budapest.

RIESZ ist einer der Väter der *Funktionalanalysis*, jener mathematischen Disziplin also, die Funktionenräume mit analytischen Methoden untersucht und insbesondere auch fundamental für die FOURIER-Analyse ist. Den obigen Satz bewies er 1907.

e) Die Plancherel-Formel

Der Satz von RIESZ sagt uns, wann lineare Funktionen auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in der Form \tilde{T}_f geschrieben werden können mit einer Funktion f aus $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Da wir die FOURIER-Theorie auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ zurückführen

wollen auf die für Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum, müssen wir daher versuchen, solche Distributionen auf $L^2(\mathbb{R}, C)$ fortzusetzen. Als erstes wollen wir uns dazu überlegen, daß wir jede Funktion aus $L^2(\mathbb{R}, C)$ als Grenzwert einer Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ schreiben können.

Wir beginnen mit dem Beispiel des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

der offensichtlich in $L^2(\mathbb{R}, C)$ liegt, wegen der beiden Unstetigkeitsstellen aber natürlich nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Wir kennen bereits eine Funktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, die auch außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die Funktion

$$g_r: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{e^{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}.$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl $r > 0$ auch

$$g_r: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} \frac{-r}{e^{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da $(t-a)(b-t)$ bei $t = (a+b)/2$ maximal wird, hat g_r dort sein einziges Maximum und

$$g_r \left(\frac{a+b}{2} \right) = e^{\frac{-4r}{(b-a)^2}}.$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert; deshalb betrachten wir besser anstelle der g_r , die mit dem Kehrwert des Maximums multipli-

zierten Funktionen

$$f_r: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{4r}{e^{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die alle bei $(a+b)/2$ ihren Maximalwert eins annehmen.

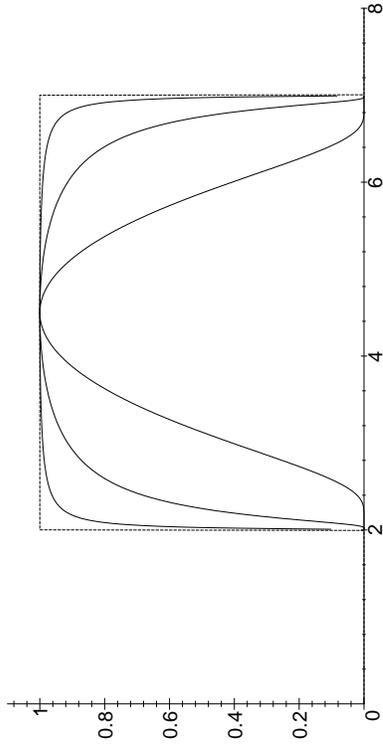


Abb. 24: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

Abbildung 24 zeigt für $a = 2$ und $b = 7$ die entsprechenden Funktionen mit $r = 10$, $r = 1$ und für $r = 0,1$. Die innerste Kurve für $r = 10$ zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für $r = 1$ ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für $r = 0,1$ schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls f .

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die f_r für $r \rightarrow 0$ in der L^2 -Norm gegen f konvergieren. Leider können wir aber $\|f - f_r\|_2$ nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von f_r kennen. (Schon e^{-t^2} ist schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß f_r im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auf Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen

wir ein $\delta > 0$ und betrachten getrennt denn mittleren Teil $[a + \delta, b - \delta]$ des Intervalls und die beiden Randintervalle $[a, a + \delta]$ und $[b - \delta, b]$.

Über das Verhalten von f_r in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall $0 \leq f_r(t) \leq 1$ ist und schätzen die Differenz zwischen $f(t) = 1$ und $f_r(t)$ daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen $f(t)$ und $f_r(t)$ im Intervallmittelpunkt $(a + b)/2$ gleich null und wächst dann zu den Intervallenden hin monoton, da f_r selbst dort monoton fällt. Tatsächlich sieht man leicht, daß f_r monoton wachsend sowohl in $t - a$ als auch in $b - t$ ist; da beide Ausdrücke im Intervall $[a + \delta, b - \delta]$ durch δ nach unten beschränkt sind, ist $f_r(t)$ in diesem Intervall daher überall mindestens gleich

$$\frac{4r}{e(b-a)^2} e^{-r} \delta(1-\delta)^{-r} = e^{-r} \left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Für alle $t \in [a + \delta, b - \delta]$ ist daher

$$f(t) - f_r(t) \leq 1 - e^{-r} \left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Dieser Ausdruck ist noch nicht sehr angenehm; wir wollen ihn weiter abschätzen. Nach Konstruktion von f_r ist der Exponent negativ, und für alle $x \geq 0$ ist $1 - e^{-x} \leq x$, denn dies gilt für $x = 0$, und die Ableitung e^{-x} von $1 - e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x . Daher ist für $t \in [a + \delta, b - \delta]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_r(t) &\leq 1 - e^{-r} \left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) \\ &\leq r \left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von δ ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte $\delta \leq \frac{1}{2}$. Dann ist $1 - \delta \geq \frac{1}{2}$ und

$$f(t) - f_r(t) \leq r \left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Damit können wir die L^2 -Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &\quad + \int_{b-\delta}^b |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &\leq \delta + r^2(b-a) \left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right)^2 + \delta. \end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell $\delta = \sqrt{r}$, was wir für hinreichend kleine r dürfen, so wird dies zu

$$\begin{aligned} &\sqrt{r} + r^2(b-a) \left(\frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2} \right)^2 + \sqrt{r} \\ &= 2\sqrt{r} + r(b-a) \left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2} \right)^2, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht gegen null für $r \rightarrow 0$. Also konvergieren die f_r für $r \rightarrow \infty$ in der L^2 -Norm gegen f .

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns noch überlegen, daß auch die Fläche zwischen den Graphen von f_r und von f für $r \rightarrow \infty$ gegen null geht: Wenn wir wie eben vorgehen, erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| dt \leq \delta + r(b-a) \left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) + \delta,$$

und wenn wir hier wieder spezialisieren auf $\delta = \sqrt{r}$ wird dies zu

$$\sqrt{r} \left(2 + (b-a) \left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2} \right) \right),$$

was für $r \rightarrow \infty$ gegen null geht.

Da f sowie sämtliche f_r außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwinden, geht damit auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| dt$$

für $r \rightarrow \infty$ gegen null. Dieses Integral bezeichnet man als die L^1 -Norm von $f - f_r$; die Folge der Funktionen f_r konvergiert also auch in der L^1 -Norm gegen f .

Diese Annäherung des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen wollen wir im nächsten Lemma auf beliebige quadratintegrierbare Funktionen ausdehnen:

Lemma: Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es eine Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$$

ist; f läßt sich also bezüglich der L^2 -Norm beliebig gut durch stark abfallende Funktionen annähern.

Beweis: In einem ersten Schritt sollten wir uns überlegen, daß f bezüglich der L^2 -Norm als Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen τ_n mit jeweils nur endlich vielen Sprungstellen dargestellt werden kann.

Da f nach Voraussetzung integrierbar ist, können wir die Funktion zumindest auf jedem endlichen Intervall durch solche Treppenfunktionen annähern, und indem wir die Intervallgrenzen gegen unendlich gehen lassen, gilt dasselbe für ganz f . Der Beweis, daß wir so eine Folge von Treppenfunktionen bekommen, die *bezüglich der L^2 -Norm* gegen f konvergiert ist ziemlich technisch und muß die ganze Konstruktion des RIEMANN-Integrals nachvollziehen; wir wollen daher auf die Einzelheiten verzichten und obige Aussage einfach glauben.

Jede der Treppenfunktionen τ_n ist eine Summe von endlich vielen Rechteckimpulsen R_{ni} , von denen wiederum jeder als Grenzwert einer Folge

$(\psi_{nij})_{j \in \mathbb{N}}$ stark abfallender Funktionen geschrieben werden kann. Mit

$$\varphi_{nj} = \sum_i \psi_{nij}$$

ist dann auch

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{nj} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_i \psi_{nij} = \sum_i R_{ni} = \tau_n,$$

denn die Summen über i sind endlich. Genau deshalb liegen die Funktionen φ_{ni} auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, und damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{nn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = f,$$

wie behauptet. ■

Korollar: Zu jeder Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es eine stetige lineare Abbildung $\tilde{T}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, die auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit T übereinstimmt.

Beweis: Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ läßt sich als Limes einer Folge φ_n stark abfallender Funktionen schreiben; wir setzen einfach

$$\tilde{T}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n).$$

Damit haben wir alle Vorbereitungen zusammen und können endlich beweisen, worauf es wirklich ankommt:

Satz von Plancherel: a) Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es Funktionen \hat{f} und \check{f} in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß

$$\hat{\hat{T}}_f = T_{\hat{f}} \quad \text{und} \quad \check{\check{T}}_f = T_f$$

ist; FOURIER-Transformierte und inverse FOURIER-Transformierte von f existieren also als Funktionen.

b) Falls die rechten Seiten existieren, kann man

$$\hat{\hat{f}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{und} \quad \check{\check{f}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

setzen.

c) \check{f} und f unterscheiden sich höchstens durch eine Nullfunktion.

d) $\|\check{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ und $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\check{f}\|_2$.

Beweis: Nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung ist für jede stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$|\widehat{T}_f(\varphi)| = |T_f(\widehat{\varphi})| = |(f, \widehat{\varphi})| \leq \|f\|_2 \|\widehat{\varphi}\|_2.$$

Wie wir aus §7c) wissen, ist $\|\widehat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_2$, also

$$|\widehat{T}_f(\varphi)| \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Nach dem Satz von RIESZ gibt es daher eine Funktion $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, für die

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}$$

ist. Falls das FOURIER-Integral existiert, wissen wir aus der Diskussion zu Beginn von §8c), daß wir für \widehat{f} die so definierte Funktion nehmen können.

In jedem Fall ist die Norm von \widehat{f} gleich der von \widehat{T}_f , also ist nach obiger Abschätzung

$$\|\widehat{f}\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

Genauso zeigt man auch die Existenz von \check{f} und daß gilt

$$\|\check{f}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$$

Da die Distributionen \check{T} und T übereinstimmen, unterscheiden sich \check{f} und f höchstens durch eine Nullfunktion, haben also insbesondere dieselbe Norm. Nach den bislang bewiesenen Ungleichungen ist

$$\|\check{f}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\check{f}\|_2 \leq \|f\|_2;$$

da links und rechts dieselbe Zahl steht, muß in beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gelten, und der Satz ist bewiesen. ■



MICHEL PLANCHEREL (1885–1967) war Professor für höhere Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, publizierte seine Arbeiten aber in französischer Sprache. Diese befassen sich nicht nur mit der FOURIER-Theorie einer und mehrerer Veränderlicher, sondern enthalten beispielsweise auch wichtige Sätze aus der sogenannten Ergodentheorie, der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme. Seine letzte, 1962 erschienene Arbeit, befaßt sich mit dem Einfluß der Steuergesetze auf die Stabilität einer Volkswirtschaft. Den obigen Satz bewies er 1910; oft wird auch nur dessen letzte Aussage als PLANCHEREL-Formel bezeichnet.

Der gerade bewiesene Satz sagt uns also, daß die FOURIER-Transformation auch auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ zumindest bis auf Nullfunktionen wohldefiniert ist, was für die meisten Zwecke genügt. Außerdem gibt es eine Aussage über die Normen, die dem Satz von PARSEVAL aus der Theorie der FOURIER-Reihen periodischer Funktionen entspricht, und die Aussage, daß FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation zumindest bis auf Nullfunktionen tatsächlich invers zueinander sind.

Gelegentlich wollen wir aber die FOURIER-Transformation an einer bestimmten Stelle wirklich kennen, und dazu ist der obige Satz zu schwach: Da die Distribution T_f die Funktion F nur bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt, legt T_f für kein einziges Argument t den Wert $f(t)$ wirklich fest.

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, daß auch der Funktionswert von f an allen Stetigkeitsstellen von f durch T_f eindeutig bestimmt ist.

Wir gehen dazu aus von zwei stückweise stetige Funktionen f und g mit $T_f = T_g$ ist. Für jede stark abfallende Funktion φ ist dann

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t) dt.$$

Dies wollen wir anwenden auf die zu Beginn dieses Abschnitts betrachteten

teten Funktionen und dort einfach mit f_r bezeichneten Funktionen

$$\varphi_{a,b,r}: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} \frac{4r}{e^{(b-a)^2} e^{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \end{cases},$$

von denen wir dort gezeigt hatten, daß sie für feste Werte von a, b und ein variables $r > 0$ für $r \rightarrow 0$ gegen den Rechteckimpuls

$$R_{a,b}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

konvergieren. Diese Konvergenz haben wir sowohl bezüglich der L^2 -Norm als auch bezüglich der L^1 -Norm nachgerechnet. Wegen letzterer können wir aus den Gleichungen

$$T_f(\varphi_{a,b,r}) = T_g(\varphi_{a,b,r})$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) R_{a,b}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) R_{a,b}(t) dt$$

schließen, daß auch

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt \quad \text{für alle } a, b.$$

Als integrierbare Funktionen haben f und g Stammfunktionen F und G ; damit ausgedrückt ist

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

(Strenggenommen haben wir das nur gezeigt für $b > a$, aber im Falle $b < a$ können wir einfach obige Überlegung für das Intervall $[b, a]$ wiederholen.) Setzen wir $b = a + h$, so gilt daher auch

$$F(a+h) - F(a) = G(a+h) - G(a)$$

und

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \frac{G(a+h) - G(a)}{h}$$

für alle $a, h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$.

Lassen wir in dieser Gleichung h gegen null gehen, erhalten wir, sofern F bzw. G im Punkt a differenzierbar ist, den Wert der jeweiligen Ableitung im Punkt a .

Falls die Funktionen f und g in der Umgebung eines Punkts stetig sind, habe sie dort differenzierbare Stammfunktionen und sind gleich deren Ableitungen; damit ist

$$f(t) = g(t) \quad \text{falls } f \text{ und } g \text{ im Punkt } t \text{ stetig sind.}$$

Die Funktionen f und g können sich also höchstens an ihren Unstetigkeitsstellen unterscheiden.

Sind f und g sogar stetig, ist also $f = g$, und das gilt auch, wenn sowohl f als auch g nur stückweise stetig sind und zusätzlich die in §4e) betrachtete Mittelwerteneigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \frac{g(t^+) + g(t^-)}{2}$$

erfüllen, denn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte hängen nur von den Werten ab, die f und g Funktionen an den Stellen annehmen, an denen sie stetig sind.

Das wird uns in den meisten Fällen reichen, insbesondere wenn wir uns auf absolut integrierbare Funktionen beschränken:

Lemma: Ist die Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ absolut integrierbar, so existiert die FOURIER-Transformierte von f als Funktion; diese Funktion ist stetig und beschränkt.

Beweis: Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Der Betrag des Integranden ist $|f(t)|$; da f absolut integrierbar ist, konvergiert das Integral absolut und ist damit insbesondere konvergent.

Der Integrand $f(t)e^{-i\omega t}$ ist als Funktion von ω für jeden Wert von t stetig und als Funktion von t immerhin noch stückweise stetig. Daher zeigt das Lemma aus §6a) zunächst, daß für Intervalle $[a, b]$, in denen f stetig ist, auch

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t} dt$$

eine stetige Funktion von ω ist. Damit gilt dasselbe für jedes endliche Intervall, denn endliche Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Für $a \rightarrow -\infty$ und $b \rightarrow \infty$ schließlich konvergiert das Integral nach Voraussetzung absolut, also auch gleichmäßig, und damit ist auch die Grenzfunktion $\widehat{f}(\omega)$ stetig und beschränkt. ■

Damit folgt insbesondere der z.B. für die Identifikation von Lösungen von Differentialgleichungen wichtige

Satz: $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien stetige Funktionen.

- a) Falls die FOURIER-Transformierten \widehat{f} und \widehat{g} übereinstimmen, ist $f = g$.
- b) Falls es ein $r > 0$ gibt, so daß $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re s = r$, ist $f(t) = g(t)$ für alle $t > 0$.

Beweis: a) folgt unmittelbar aus dem gerade bewiesenen Lemma, und b) folgt daraus, daß man dieses Lemma auf die Funktionen

$$f_r: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

$$g_r: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ g(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

und

angewendet, die zumindest für $t > 0$ stetig sind, und deren FOURIER-Transformationen gerade die LAPLACE-Transformationen von f und g für $\Re s = r$ sind. ■

f) Ableitungen von Distributionen

Wie wir in §6b) gesehen haben, ist für alle mindestens r -fach stetig differenzierbare Funktionen f , sofern alle vorkommenden FOURIER-Transformierten existieren,

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r t^r \widehat{f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega);$$

eine ähnliche, leicht komplexere Formel gilt auch für die LAPLACE-Transformation. Dies hatten wir im weiteren Verlauf von §6 zur Lösung erster Differentialgleichungen verwendet.

Inzwischen können wir die Voraussetzungen etwas präziser formulieren; insbesondere ist klar, daß diese Formeln für alle stark abfallenden Funktionen und alle $r \in \mathbb{N}$ gelten. Auch wissen wir, daß sie für quadratintegrierbare Funktionen gelten, falls auch alle Ableitungen bis zur jeweils betrachteten quadratintegrierbar sind.

In diesem Paragraphen wollen wir uns überlegen, wie man diesen Formeln auch für beliebige quadratintegrierbare Funktionen mit Hilfe von Distributionen zumindest bis auf Nullfunktionen einen Sinn geben kann.

Dazu überlegen wir uns zunächst, was Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen bedeuten, wie man also beispielsweise eine Ableitung der DIRACSchen δ -Distribution definieren kann. Es ist klar, daß ein Ansatz wie

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}$$

zu keinem vernünftigen Ergebnis führen kann; wir müssen unserer alten Strategie folgen und für eine differenzierbare Funktion f die Distribution T_f ausrechnen in der Hoffnung, daß dies zu einer Formel führt, die sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Für eine differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft, daß sowohl f als auch die Ableitung f' höchstens polynomiales Wachstum haben, ist

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt.$$

definiert und nach der Regel für partielle Integration ist

$$T_f(\varphi) = f(t)\varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) dt.$$

Da f höchstens polynomiales Wachstum hat, ist $|f(t)|$ kleiner oder gleich einem Ausdruck der Form $c|t|^k$ für eine reelle Zahl $c > 0$ und eine natürliche Zahl k . Da außerdem φ eine stark abfallende Funktion ist, bleibt $|t^{k+1}\varphi(t)|$ beschränkt für alle t , d.h.

$$|\varphi(t)| \leq \frac{M}{|t|^{k+1}}$$

für eine reelle Zahl $M > 0$. Damit ist

$$|f(t)\varphi(t)| \leq |ct^k| \cdot \frac{M}{|t|^{k+1}} \leq \frac{cM}{|t|}.$$

Somit geht das Produkt $\varphi(t)f(t)$ gegen Null für $t \rightarrow \pm\infty$ und

$$T_f(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) dt = -T_f(\dot{\varphi}).$$

Damit ist klar, wie wir die Ableitung einer Distribution definieren:

Definition: Die Ableitung einer Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\dot{T}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto -T_f(\dot{\varphi}) \end{cases},$$

die n -te Ableitung entsprechend

$$T^{(n)}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto (-1)^n T_f(\varphi^{(n)}) \end{cases}.$$

Zum Nachweis, daß \dot{T} und allgemeiner auch $T^{(n)}$ Distributionen sind, müssen wir zeigen, daß dies lineare Abbildungen sind – angesichts der Linearität der Differentiation ist das klar. Zum Nachweis der Stetigkeit aber müssen wir wissen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum auch die Folge der abgeleiteten Funktionen konvergiert; dies gilt nur deshalb, weil wir die Konvergenz im SCHWARTZ-Raum so definiert haben, daß auch alle Ableitungen und deren Produkte mit t -Potenzen konvergieren müssen.

Beispielsweise ist also für die DIRAC-Distribution

$$\Delta_a^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$$

oder, mit der δ -„Funktion“ ausgedrückt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\varphi(t) dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(a).$$

Auch Sprungfunktionen wie

$$\vartheta: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

lassen sich in der schönen neuen Welt der Distributionen problemlos differenzieren:

$$T_{\vartheta}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\varphi(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt$$

hat als Ableitung die Distribution \dot{T}_{ϑ} mit

$$\dot{T}_{\vartheta}(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\dot{\varphi}(t) dt = - \int_0^{\infty} \dot{\varphi}(t) dt = -\varphi(t) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0),$$

da $\varphi(t)$ bei einer stark abfallenden Funktion für $t \rightarrow \infty$ gegen null geht. Diese Distribution kennen wir aber: Es ist gerade die DIRAC-Distribution Δ_0 . Also ist

$$\dot{T}_{\vartheta} = \Delta_0,$$

was sich in Funktionen ausgedrückt (mit aller gebotenen Vorsicht) auch als

$$\vartheta(t) = \delta(t)$$

schreiben läßt. Entsprechend lassen sich im Distributionensinne auch andere Sprungfunktionen differenzieren; die Ableitung an einer Sprungstelle $t = t_0$ ist jeweils Sprunghöhe mal $\delta(t - t_0)$.

Auch mit der Ableitung der Betragsfunktion haben wir auf Distributionenniveau keine Probleme: Für $f(t) = |t|$ zeigt partielle Integration, daß

$$\begin{aligned} \dot{T}_f(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \cdot \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} t \cdot \varphi(t) dt \\ &= t\varphi(t) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt - t\varphi(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = T_g(\varphi) \end{aligned}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

An der Stelle $t = 0$ können wir einen beliebigen Funktionswert wählen, denn T_g hängt nicht von diesem Wert ab. Wir bekommen also für $t \neq 0$, wo $f(t) = |t|$ differenzierbar ist, die erwarteten Ergebnisse, und für $t = 0$ keine Aussage. Nichtsdestoweniger ist die *Distribution* \dot{T}_f wohldefiniert. Auf dem Niveau der Distributionen sind Ableitungen also auch für nur stückweise differenzierbare Funktionen problemlos.

Das Produkt einer Distribution mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum haben wir bereits definiert; das können wir insbesondere anwenden auf die Funktion

$$\Pi_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^r.$$

Wir erwarten

Lemma: Für jede Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ und jede natürliche Zahl r ist

$$\widehat{T}^{(r)} = (-i)^r \widehat{\Pi_r T} \quad \text{und} \quad \Pi_r \widehat{T} = (-i)^r \widehat{T}^{(r)}.$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt nach den entsprechenden Formeln für stark abfallende Funktionen aus §6b)

$$\begin{aligned} \widehat{T}^{(r)}(\varphi) &= (-1)^r \widehat{T}(\varphi^{(r)}) = (-1)^r T(\widehat{\varphi^{(r)}}) = (-1)^r T(i^r \Pi_r \widehat{\varphi}) \\ &= (-i)^r T(\Pi_r \widehat{\varphi}) = (-i)^r \Pi_r T(\widehat{\varphi}) = (-1)^r \widehat{\Pi_r T}(\varphi), \end{aligned}$$

denn aus der Formel $\omega^r \widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r \widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)$ folgt

$$\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega) = i^r \omega^r \widehat{\varphi}(\omega).$$

Entsprechend zeigt man auch die zweite Formel

$$\begin{aligned} \Pi_r \widehat{T}(\varphi) &= \widehat{T}(\Pi_r \varphi) = T(\widehat{\Pi_r \varphi}) = T(i^r \widehat{\varphi}^{(r)}) \\ &= i^r T(\widehat{\varphi}^{(r)}) = (-i)^r T^{(r)}(\widehat{\varphi}) = (-i)^r \widehat{T}^{(r)}(\varphi). \end{aligned}$$

■

Rückübersetzt für Funktionen heißt das, daß die Formeln

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r t^r f(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r f^{(r)}(\omega);$$

zumindest bis auf Nullfunktionen auch dann für quadratintegrierbare Funktionen gelten, wenn diese nur im Distributionensinn differenzierbar sind. Die entsprechende Formel für die LAPLACE-Transformation, die zusätzlich die Funktions- und Ableitungswerte an der Stelle Null enthält, ist natürlich (auch modulo Nullfunktionen) nur dann sinnvoll, wenn diese Werte wohldefiniert sind.

g) Faltungen

Bei der Untersuchung von FOURIER-Reihen in §4a) erwies sich die (periodische) Faltung zweier Funktionen als wichtiges Instrument zum