

an, fließt ein Strom der Amplitude

$$I_0 = U_0 / \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

auch hier haben wir also wieder einen von der Frequenz abhängigen Widerstand.

Wechselstromkreise haben zwar mehr mit Technischer Informatik zu tun als Geigen und Trompeten; sie gehören aber doch eher zum Arbeitsgebiet eines Elektroinstallateurs als zu dem eines Informatikers. Natürlich fließen auch in einem Computer Ströme, aber mit reinen Wechselströmen kann man fast genauso wenig anfangen wie mit einem Computer, in dem überall ein konstanter Gleichstrom fließt: Elektronische Informationsverarbeitung lebt von schnell und unregelmäßig variierenden Strömen. Diese fließen allerdings durch genau die Schaltelemente, von denen wir gerade gesehen haben, daß ihr Verhalten stark von der Frequenz abhängt.

Um auch solche Situationen berechenbar zu machen, müssen wir einen beliebigen Stromverlauf in eine *Summe reiner Wechselströme* zerlegen, so wie man auch den Ton eines Musikinstruments in seine Grundschiwingung und die Oberschwingungen zerlegen kann. Wir werden in diesem Kapitel als erstes sehen, daß man jede (halbwegs vernünftige) *periodische* Funktion beliebig genau durch Summen reiner Schwingungen annähern kann; die entsprechende Konstruktion bezeichnet man als *harmonische Analyse*. Sie gestattet es, auch für ein komplizierteres Signal dessen Verhalten in einer (linearen) Schaltung zu berechnen: Wir müssen einfach jede der reinen Schwingungen, aus denen es zusammengesetzt ist, für sich betrachten und die Ergebnisse aufsummieren.

Für nichtperiodische Funktionen wird sich zeigen, daß hier zwar keine Zerlegung in diskrete Grund- und Oberschwingungen mehr möglich ist, daß es aber ein *kontinuierliches Frequenzspektrum* gibt, mit dem man genauso arbeiten kann, wenn man die Beiträge der einzelnen Frequenzen nicht mehr summiert, sondern aufintegriert.

Bevor wir uns mit diesen Zerlegungen beschäftigen, brauchen wir zunächst einige Vorbereitungen über komplexe Funktionen.

Kapitel 3 Harmonische Analyse und Integraltransformationen

Selbst der unmusikalischste Zuhörer erkennt sofort, ob ein Ton, beispielsweise zur Note „g“, auf einer Geige oder auf einer Trompete gespielt wurde – obwohl es sich in beiden Fällen um dieselbe Note mit derselben Frequenz 192 Hertz handelt. Der Grund dafür dürfte allgemein bekannt sein: Die verschiedenen Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand der Verhältnisse zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch deren zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns die Verhältnisse selbst quantitativ nicht bewußt sind. Umgekehrt werden bei der Synthese von Tönen etwa durch eine Soundkarte reine Schwingungen erzeugt und kombiniert.

Genau wie unser Ohr reagieren auch elektrische Schaltungen in unterschiedlicher Weise auf verschiedene Frequenzen: Legt man beispielsweise an eine Spule mit OHMSchem Widerstand R und Induktivität L eine Gleichspannung U_0 an, so fließt ein Strom der Stärke I_0 , für den nach dem OHMSchen Gesetz gilt: $U_0 = RI_0$. Ersetzt man aber die Gleichspannung durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω , so gilt für die Amplitude I_0 des dann fließenden Wechselstroms $U_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_0$, der Widerstand hängt also ab von der Frequenz.

Ersetzt man die Spule durch einen Kondensator mit Kapazität C und Widerstand (der Zuleitungen) R , so fließt beim Anlegen einer Gleichspannung natürlich überhaupt kein Strom: Der Kondensator läßt sich einfach auf. Legt man aber eine Wechselspannung der Kreisfrequenz ω

§ 1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen

a) Wozu komplexe Zahlen

Funktionen einer Veränderlichen werden in der Technik typischerweise dazu eingesetzt, um die Zeitabhängigkeit physikalischer Größen auszudrücken: So kann beispielsweise ein Wechselstrom der Amplitude I_0 und der Kreisfrequenz ω durch die Gleichung $I(t) = I_0 \sin \omega t$ beschrieben werden. Schaut man allerdings in Lehrbücher der Elektrotechnik, so findet man dort oft stattdessen die Formel

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}.$$

(Tatsächlich schreiben Elektrotechniker natürlich $e^{j\omega t}$, denn im Gegensatz zu Mathematikern und Physikern bezeichnen sie $\sqrt{-1}$ nicht mit i , sondern mit j .)

Auf den ersten Blick erscheint dies unsinnig: Was soll man sich beispielsweise unter einem Strom von $4 - 2i$ Milliampère vorstellen? Einen solchen Strom gibt es natürlich nicht. Tatsächlich ist die obige Gleichung so zu interpretieren, daß ihr Imaginärteil den tatsächlichen Strom beschreibt, während der Realteil ignoriert wird. Auf Grund der EULERSchen Formeln

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \cos \omega t = \Re e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \sin \omega t = \Im e^{i\omega t}$$

beschreibt also auch dieser Formalismus einen tatsächlich fließenden Strom $I_0 \sin \omega t$. (Einige Bücher verwenden die Konvention, daß nur der Realteil zählt und der Imaginärteil ignoriert wird; in diesem Fall würde $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ den Strom $I_0 \cos \omega t$ beschreiben.)

Der Sinn dieser Vorgehensweise liegt in mindestens zwei rechnerischen Vorteilen: Zum ersten sind Additionsregeln für trigonometrische Funktionen, vor allem wenn man sie mehrfach anwenden muß, ziemlich unangenehm, wohingegen wir für die Exponentialfunktion, egal ob mit reellen oder komplexen Argumenten, stets mit der einfachen Regel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ rechnen kann.

Der zweite Vorteil wird offensichtlich, wenn wir Wechselstromnetzwerke betrachten, die nicht nur Widerstände, sondern auch Spulen und

Kondensatoren enthalten: Geht ein variabler Strom durch eine Spule der Induktivität L , so wird die Spannung $U(t) = LI'(t)$ induziert. In reeller Beschreibung ist also bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin \omega t$

$$U(t) = LI_0 \omega \cos \omega t.$$

Beim komplexen Ansatz mit $I(t) = I_0 e^{i\omega t} = I_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$ können wir dagegen einfach mit $i\omega L$ multiplizieren, denn

$$i\omega L \cdot I_0 e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = LI_0 \omega (-\sin \omega t + i \cos \omega t)$$

hat als Imaginärteil genau die gerade berechnete Funktion $U(t)$. Während wir im Reellen also stets auch die Zeitabhängigkeit der Stromstärke im Auge behalten müssen, reicht es bei komplexer Darstellung, einfach die Amplituden zu betrachten.

Ähnlich ist es bei Kondensatoren: Hier fließt bei Kapazität C und Ladung $Q(t)$ des Kondensators der Strom $I(t) = \dot{Q}(t)$. Falls dies ein reiner Wechselstrom ist, können wir ihn – in reeller Form – als $I(t) = I_0 \sin \omega t$ schreiben, und die Spannung zwischen den beiden Platten des Kondensators ist

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{1}{C} \int I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0 \cos \omega t}{\omega C},$$

der Imaginärteil von

$$\frac{1}{i\omega C} \cdot I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \frac{I_0}{\omega C} \cdot (\sin \omega t - i \cos \omega t).$$

Auch hier müssen wir also bei komplexer Darstellung nur mit der festen Zahl $\frac{1}{i\omega C}$ multiplizieren statt wie im Reellen zu integrieren.

Rein formal kann man somit im komplexen Kalkül, der sogenannten *komplexen Zeigerrechnung*, Induktivitäten und Kapazitäten als rein imaginäre „Widerstände“ hinschreiben und mit diesen genauso rechnen, wie man es bei Gleichstromnetzen mit nur OHMSchen Widerständen gewohnt ist. Zusammen mit den auch in Wechselstromnetzen allgegenwärtigen OHMSchen Widerständen, für die das klassische OHMSche Gesetz gilt, hat man somit insgesamt formal einen komplexen Widerstand, die sogenannte *Impedanz*. Sein Betrag beschreibt den auf die Amplituden des Wechselstroms bezogenen Widerstand, sein Argument die Phasenverschiebung.

Die KIRCHHOFFSchen Gesetze gelten auch für die komplexe Beschreibung von Strömen und Spannungen, insbesondere gelten für die Parallelschaltung von Impedanzen genau die Regeln, die man von den OHMSchen Widerständen her gewohnt ist, und man kann Ströme und Spannungen in Wechselstromnetzwerken mit nur passiven Bauelementen genauso berechnen wie bei Gleichstromnetzwerken, die nur Widerstände enthalten. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man nun lineare Gleichungssysteme mit *komplexen* Koeffizienten lösen muß. Bei einer rein reellen Beschreibung müßte man statt dessen Differentialgleichungssysteme betrachten, was – wie wir im nächsten Kapitel sehen werden – erheblich aufwendiger ist. (Bei komplizierteren Schaltungen, die auch aktive Bauteile enthalten, gibt es dazu allerdings keine Alternative mehr.)

Auch die eingangs erwähnten Formeln für die Spannungsamplituden in einem RL - bzw. RC -Kreis lassen sich durch komplexe Zeigerrechnung leicht erklären: Im RL -Kreis ist die Impedanz gleich $R + i\omega L$; bei einem Wechselstrom $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ ist die Spannung also in komplexer Darstellung $U(t) = (R + i\omega L) \cdot I_0 e^{i\omega t}$. Da e^{ix} für reelles x stets den Betrag eins hat, ist der Betrag von $U(t)$ gleich dem der komplexen Zahl $(R + i\omega L)I_0$, also $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0$.

Warum ist dieser Betrag gleich der Amplitude des Imaginärteils? Für die Funktion $Ae^{i\omega t}$ mit komplexem A (hier ist $A = (R + i\omega L) \cdot I_0$), können wir A auch in Polarkoordinaten schreiben als $A = |A| \cdot e^{i\psi_0}$. Dann ist der Imaginärteil hat also in der Tat Amplitude $|A|$. Bei reeller Rechnung kämen wir zwar zum selben Ergebnis, aber wir müßten in diesem Fall die Amplitude der Funktion

$$\omega LI_0 \cos \omega t + RI_0 \sin \omega t$$

berechnen. Dazu müßten wir diesen Ausdruck auf die Form

$$A_0 \sin(\omega t + \psi) = A_0 \sin \psi \cos \omega t + A_0 \cos \psi \sin \omega t$$

bringen, d.h. wir müßten eine Phasenverschiebung ψ und eine Amplitude A_0 finden, so daß

$$\omega LI_0 = A_0 \sin \psi \quad \text{und} \quad RI_0 = A_0 \cos \psi$$

ist. Wegen der Beziehung $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ ist natürlich auch hier

$$A_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0,$$

die Rechnung ist aber erheblich aufwendiger.

Auf Grund dieser vielen Vorteile hat sich die komplexe Zeigerrechnung allgemein durchgesetzt; ihre einfache Handhabbarkeit wiegt den Nachteil des zunächst etwas unanschaulichen Ansatzes mehr als auf, und im übrigen gewöhnt man sich nach etwas praktischer Übung auch sehr schnell daran.

Auch in der Wellenoptik erweist es sich oft als große Vereinfachung und Arbeitersparnis, wenn man mit komplexen Schwingungen rechnet. Wir werden daher in diesem Kapitel nicht nur reelle, sondern auch komplexe Funktionen betrachten. Da wir viel differenzieren und integrieren müssen, wollen wir uns zunächst überlegen, was diese Operationen im Komplexen bedeuten und welche Gesetze dafür gelten.

Wer immer noch Probleme darin sieht, mit komplexen Größen zu rechnen, die keinerlei physikalische Realität haben, sollte sich daran erinnern, daß auch die reellen Zahlen eine mathematische Konstruktion ohne Entsprechung in der Realität sind. Die Erfahrung in Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften haben gezeigt, daß die reellen Zahlen dort außerordentlich nützlich sein können, einen logischen Grund dafür gibt es aber nicht. Genauso verhält es sich mit vielen anderen mathematischen Theorien, insbesondere auch hier beim komplexen Formalismus zur Beschreibung elektrischer Größen.

Der Physik-Nobelpreisträger EUGENE WIGNER (1902–1995) bezeichnete dieses Phänomen im Titel einer seiner Arbeiten als „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences“ (*Communications in pure and applied mathematics* **13** (1960), 1–14; *zahlreiche Nachdrucke im WWW*). Wirklich zum Tragen kommt diese schwer erklärbare Nützlichkeit der Mathematik allerdings nur in den Händen eines Anwenders, der sowohl ihre Möglichkeiten als auch ihre Grenzen für seinen jeweiligen Problembereich kennt.

b) Holomorphe Funktionen

Um möglichst schnell zu Ergebnissen zu kommen, identifizieren wir die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} mit der reellen Ebene \mathbb{R}^2 , indem wir den Punkt $x + iy \in \mathbb{C}$ (meist stillschweigend) mit dem Punkt (x, y) aus \mathbb{R}^2 identifizieren. Eine Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entspricht damit einem Vektorfeld $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dafür können wir die Ergebnisse aus dem letzten Kapitel anwenden, allerdings liefern uns diese noch nicht alles, was wir brauchen: Die Ableitung $f'(z)$ im Punkt $z \in \mathbb{C}$ soll natürlich eine komplexe Zahl sein; die Ableitung eines Vektorfelds aber ist die reelle JACOBI-Matrix. In der Tat wird sich herausstellen, daß die komplexe Differenzierbarkeit von f eine sehr viel einschneidendere Forderung ist als die Differenzierbarkeit des entsprechenden Vektorfelds; sie hat es daher verdient, daß wir dafür auch ein neues Wort einführen:

Definition: Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* im Punkt $z \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert und stetig ist. f heißt *komplex differenzierbar in D* , wenn f in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar ist. f heißt *holomorph* in D , wenn zusätzlich $f': D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist.

Der große Unterschied zum reellen Differentialquotienten liegt darin, daß h hier eine *komplexe* Zahl ist, die sich nicht nur von rechts und links, sondern aus allen Richtungen und auf jedem beliebigen Weg (für den $z+h$ noch in D liegt) dem Nullpunkt nähern kann. Um zu sehen, was das bedeutet, betrachten wir zunächst die beiden einfachsten Fälle, daß sich h ganz auf der reellen bzw. der imaginären Achse bewegt.

Konkret sei $z = x + iy$ und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit zwei Funktionen $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$. (Hier wird D also als Teilmenge von \mathbb{R}^2 aufgefaßt.)

Für *reelles* h ist dann

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h};$$

der Grenzwert für h gegen Null, so er existiert, ist damit gleich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Für rein *imaginäres* $h = ik$ ist entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} \\ &= \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} - i \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k}; \end{aligned}$$

der Grenzwert für h (oder k) gegen Null ist also, so er existiert, gleich

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Falls f komplex differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

oder kurz

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad v_x = -u_y.$$

Diese Gleichungen heißen CAUCHY-RIEMANNSCHE Differentialgleichungen; sie sind eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion komplex differenzierbar ist.



GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) war Sohn eines lutherischen Pastors und schrieb sich 1846 auf Anraten seines Vaters an der Universität Göttingen für das Studium der Theologie ein. Schon bald wechselte an die Philosophische Fakultät, um dort unter anderem bei GAUSS Mathematikvorlesungen zu hören. Nach Promotion 1851 und Habilitation 1854 erhielt er dort 1857 einen Lehrstuhl. Trotz seines frühen Todes initiierte er grundlegende auch noch heute fundamentale Entwicklungen in der Geometrie, der Zahlentheorie und über abelsche Funktionen. Seine Vermutung über die Nullstellen der (heute als RIEMANNSCHE bezeichneten) ζ -Funktion ist die berühmteste offene Vermutung der heutigen Mathematik.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857) kennen wir bereits von der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung.

Es ist nicht ganz so offensichtlich, daß die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sogar *linear* sind. Um das einzusehen, fassen wir \mathbb{C} als zweidimensionalen reellen Vektorraum auf und betrachten für jede komplexe Zahl $c = a + ib$ die lineare Abbildung

$$\varphi_c: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto cz \end{cases}.$$

Da sie 1 auf $a + ib$ und i auf $-b + ia$ abbildet, hat sie bezüglich der \mathbb{R} -Basis $\{1, i\}$ von \mathbb{C} die Abbildungsmatrix

$$M_c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

und umgekehrt entspricht jede lineare Abbildung mit einer Matrix dieser Form der Multiplikation mit einer komplexen Zahl.

Betrachten wir nun die komplexe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ als Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so ist

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix},$$

und für dieses Vektorfeld gilt, sofern es differenzierbar ist,

$$f(x + k, y + \ell) = f(x, y) + J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o(\sqrt{k^2 + \ell^2})$$

mit der JACOBI-Matrix

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann von obiger Gestalt, wenn im Punkt (x, y) die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

erfüllt sind; in diesem Fall gilt für die komplexe Zahl

$$w = u_x(x, y) + iv_y(x, y) = v_y(x, y) - iv_x(x, y),$$

daß $J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$ als komplexe Zahl aufgefaßt gleich $w \cdot (k + i\ell)$ ist. Alsdann läßt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u(x+k, y+\ell) \\ v(x+k, y+\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + J_f(x, y) \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} + o\left(\left|\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}\right|\right)$$

mit $h = k + i\ell$ auch komplex schreiben als

$$f(z+h) = f(z) + wh + o(h),$$

denn der Betrag der komplexen Zahl $h = k+i\ell$ ist gleich $\sqrt{k^2 + \ell^2}$ und damit gleich der Länge des Vektors $\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix}$. Wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt sind, ist f daher im Punkt z komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = w$.

Damit haben wir gezeigt

Satz: Die Funktion $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist genau dann komplex differenzierbar im Punkt $x + iy$, wenn dort die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

gelten. ■

c) Beispiele holomorpher Funktionen

Um ein Gefühl für Holomorphie zu bekommen, wollen wir uns überlegen, welche der gängigen Funktionen holomorph sind und welche nicht.

Mit am einfachsten sind die Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n$. Diese lassen sich allerdings nur umständlich in Realteil und Imaginärteil zerlegen – was im übrigen auch der Grund ist, warum eine Formel wie $e^{10it} = (e^{it})^{10}$ soviel einfacher ist als

$$\cos 10t = 512 \cos^{10} t - 1280 \cos^8 t + 1120 \cos^6 t - 400 \cos^4 t + 50 \cos^2 t - 1$$

und warum komplexe Funktionen für uns attraktiv sind.

Zumindest in diesem Fall ist es daher einfacher, die komplexe Differenzierbarkeit direkt nachzurechnen; die Rechnung ist identisch mit der aus

Schule und Analysis I bekannten Rechnung im Reellen: Für beliebige Zahlen $z, h \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist nach der binomischen Formel

$$\begin{aligned} (z+h)^n - z^n &= z^n + nhz^{n-1} + \binom{n}{2}h^2z^{n-2} + \dots + h^n - z^n \\ &= h \left(nz^{n-1} + \binom{n}{2}hz^{n-2} + \dots + h^{n-1} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + \binom{n}{2}hz^{n-2} + \dots + h^{n-1}.$$

Läßt man rechts h gegen Null gehen, verschwinden alle Terme außer dem ersten, d.h. auch im Komplexen ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1},$$

und da dies eine stetige Funktion ist, sind zumindest Potenzen holomorph. Damit definieren auch alle komplexen Polynome holomorphe Funktionen und haben ihre gewohnten Ableitungen, denn auch im Komplexen ist Differentiation eine lineare Operation.

Die nächste extrem wichtige Funktion ist die Exponentialfunktion. Auch hier könnten wir direkt rechnen, wollen aber zur Abwechslung die CAUCHY-RIEMANNSSCHEN Differentialgleichungen anwenden: Nach den EULERSCHEN Formeln ist

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

für $f(z) = e^z$ ist also $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Damit ist

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad v_x(x, y) = -u_y(x, y) = e^x \sin y,$$

die CAUCHY-RIEMANNSSCHEN Differentialgleichungen sind also erfüllt. Die Ableitung kann z.B. über die Differenzenquotienten mit reellem h berechnet werden; für $z = x + iy$ ist

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z,$$

wie gewohnt. Insbesondere ist die Ableitung stetig, die Exponentialfunktion also holomorph.

Auch die Ableitung von $f(z) = e^{\omega z}$ für $\omega = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$ bringt keine Überraschungen:

$$f(x+iy) = e^{(\lambda+i\mu)(x+iy)} = e^{\lambda x - \mu y} e^{i(\lambda y + \mu x)} = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit

$$u(x, y) = e^{\lambda x - \mu y} \cos(\lambda y + \mu x) \quad \text{und} \quad v(x, y) = e^{\lambda x - \mu y} \sin(\lambda y + \mu x),$$

d.h.

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y) = \lambda e^{\lambda x - \mu y} \cos(\lambda y + \mu x) - \mu e^{\lambda x - \mu y} \sin(\lambda y + \mu x) \\ &= e^{\lambda x - \mu y} (\lambda \cos(\lambda y + \mu x) - \mu \sin(\lambda y + \mu x)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= -u_y(x, y) = \lambda e^{\lambda x - \mu y} \sin(\lambda y + \mu x) + \mu e^{\lambda x - \mu y} \cos(\lambda y + \mu x) \\ &= e^{\lambda x - \mu y} (\lambda \sin(\lambda y + \mu x) + \mu \cos(\lambda y + \mu x)). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir auch hier das erwartete Ergebnis

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) \\ &= e^{\lambda x - \mu y} ((\lambda + i\mu) \cos(\lambda y + \mu x) + (-\mu + i\lambda) \sin(\lambda y + \mu x)) \\ &= e^{\lambda x - \mu y} ((\lambda + i\mu) \cos(\lambda y + \mu x) + i(\lambda + i\mu) \sin(\lambda y + \mu x)) \\ &= e^{\lambda x - \mu y} (\mu + i\lambda) (\cos(\lambda y + \mu x) + i \sin(\lambda y + \mu x)) \\ &= \omega e^{\lambda x - \mu y} e^{i(\lambda y + \mu x)} = \omega e^{\omega z}. \end{aligned}$$

Wenn wir die EULERSCHEN Formeln

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

als Definition für komplexwertige trigonometrische Funktionen nehmen, folgt aus der Linearität der Ableitung, daß auch diese Funktionen holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz} \cos \omega z = -\omega \sin \omega z \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz} \sin \omega z = \omega \cos \omega z.$$

Schließlich gilt auch die Produktregel genau wie im Reellen: Sind $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, so ist für $z, z+h \in D$

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(z+h) - (fg)(z)}{h} &= \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\ &= \frac{f(z+h)(g(z+h) - g(z)) + (f(z+h) - f(z))g(z)}{h} \\ &= f(z+h) \frac{g(z+h) - g(z)}{h} + \frac{f(z+h) - f(z)}{h} g(z), \end{aligned}$$

was für $h \rightarrow 0$ gegen $f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$ konvergiert. Damit ist auch das Produkt zweier holomorpher Funktionen holomorph, und wie im Reellen gilt die LEIBNIZ-Regel

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

Auch die zweite wichtige Differentiationsregel, die Kettenregel, folgt genau wie im Reellen: Für eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und eine weitere holomorphe Funktion $g: D \rightarrow U$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist zunächst wegen der Holomorphie von g für alle $z \in D$

$$g(z+h) = g(z) + hg'(z) + o(h),$$

also folgt aus der Holomorphie von f , daß

$$f(g(z+h)) = f(g(z) + hg'(z) + o(h)) = f(g(z)) + hg'(z)f'(g(z)) + o(h)$$

ist, und

$$\frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{h} = g'(z)f'(g(z)) + \frac{o(h)}{h}$$

konvergiert für $h \rightarrow 0$ gegen $g'(z)f'(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$. Also ist auch $f(g(z))$ eine holomorphe Funktion, und wie im Reellen ist

$$\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z).$$

Um zu sehen, daß es auch keine Probleme mit von Null verschiedenen Quotienten gibt, müssen wir daher nur noch die eine Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z} \end{cases}$$

betrachten. Hier ist

$$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2},$$

also

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Somit ist

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad v_x = -u_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

also

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x-iy)^2}{((x+iy)(x-iy))^2} = \frac{-1}{(x+iy)^2} = \frac{-1}{z^2}.$$

Insbesondere wissen wir damit, daß alle Funktionen holomorph sind, die durch Grundrechenarten und Hintereinanderausführung aus Potenzen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt werden können – sofern bei den Divisionen keine Nullen im Nenner auftauchen.

Beispielsweise ist also

$$f(z) = \sin z \cdot e^{2z^2 + \cos z}$$

eine holomorphe Funktion, und ihre Ableitung kann genau wie im Reellen berechnet werden als

$$f'(z) = (4z \sin z - \sin^2 z + \cos z)e^{2z^2 + \cos z}.$$

Eine bislang noch nicht betrachtete einfache Funktion ist die Betragsfunktion $f(z) = |z|$. Hier ist

$$f(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$$

stets reell, also $u(x, y) = f(x+iy)$ und $v(x, y) \equiv 0$. Da

$$u_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

im Nullpunkt undefiniert und überall sonst ungleich Null sind, sind hier die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen *nirgends* erfüllt;

im Komplexen ist also die Betragsfunktion *nirgends* komplex differenzierbar oder gar holomorph.

Dasselbe gilt auch für die komplexe Konjugation $f(z) = \bar{z}$, denn hier ist

$$f(x + iy) = x - iy, \quad \text{d.h. } u(x, y) = x \text{ und } v(x, y) = -y,$$

so daß überall

$$u_x(x, y) = 1 \neq -1 = v_y(x, y)$$

ist. In diesem Beispiel ist das entsprechende Vektorfeld $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ *überall* differenzierbar mit konstanter JACOBI-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, aber da die beiden Diagonalelemente dieser Matrix verschieden sind, entspricht sie keiner komplexen Zahl.

Für $f(z) = \Re z$ schließlich ist $u_x \equiv 1$ und $v_y \equiv 0$, für $f(z) = \Im z$ umgekehrt $u_x \equiv 0$ und $v_y \equiv 1$; auch diese beiden Funktionen sind also nirgends komplex differenzierbar, obwohl die entsprechenden Vektorfelder auf \mathbb{R}^2 überall beliebig oft differenzierbar sind.

d) Der Cauchysche Integralsatz

Wenn wir eine reelle Funktion einer Veränderlichen zwischen $x = a$ und $y = b$ integrieren wollen, gibt es nur eine Möglichkeit, von a nach b zu gehen: Wir befinden uns schließlich auf einer Geraden. Die komplexen Zahlen dagegen bilden eine Ebene, und dort gibt es viele Möglichkeiten, um von einem gegebenen Punkt zu einem anderen zu kommen. Integrale komplexwertiger Funktionen sind daher stets *Kurvenintegrale*.

Das Integral der komplexen Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}; \quad z = x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$$

längs eines Kurvenstücks $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kann in völliger Analogie zum RIEMANN-Integral definiert werden: Wir wählen eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$$

und betrachten dazu die Summe

$$\sum_{\nu=1}^N f(\gamma(\tau_\nu)) (\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1}))$$

für geeignete Zwischenwerte $t_{\nu-1} \leq \tau_\nu \leq t_\nu$; der Wert des Integrals ist der Grenzwert für immer feinere Unterteilungen, so er existiert.

Es wäre kein Problem, dies im einzelnen auszuführen und so zu einer Definition des Integrals zu kommen, es geht allerdings schneller, wenn wir mit bekannteren reellen Integralen arbeiten:

Falls der Integrationsweg γ einfach gleich seinem Definitionsintervall sein sollte, γ also die identische Abbildung ist, haben wir sowohl für den Realteil als auch den Imaginärteil von f gewöhnliche RIEMANN-Summen; wenn die Folge dieser Summen überhaupt konvergiert, dann also gegen eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil die Integrale über Real- und Imaginärteil von f sind:

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b \Re f(t) dt + i \int_a^b \Im f(t) dt \quad \text{für } \gamma: \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t \end{cases}.$$

Damit kennen wir Integrale über reelle Integrationswege. Für beliebige Kurvenstücke γ konvergiert die Folge der Summen

$$\sum_{\nu=1}^N f(\gamma(\tau_\nu)) (\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1}))$$

bei immer weiterer Verfeinerung, falls überhaupt, offensichtlich gegen das komplexe Integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

mit reellem Integrationsweg, wir können also das Integral einfach über diese Formel definieren:

Definition: a) Für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und ein Kurvenstück $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ist

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt,$$

sofern die (komponentenweise zu berechnende) rechte Seite existiert.
 b) Das Integral über eine Kurve γ ist gleich der Summe der Integrale über die Kurvenstücke γ_ν , aus denen γ zusammengesetzt ist.

Wir wollen dies weiter ausrechnen und auf bekannte Integrale über reelle Vektorfelder zurückführen. Dazu schreiben wir

$$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

mit $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und identifizieren $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit dem reellen Vektorfeld $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b \left(u(\alpha(t), \beta(t)) + iv(\alpha(t), \beta(t)) \right) (\dot{\alpha}(t) + i\dot{\beta}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(u(\alpha(t), \beta(t)) \dot{\alpha}(t) - v(\alpha(t), \beta(t)) \dot{\beta}(t) \right) dt \\ &\quad + i \int_a^b \left(v(\alpha(t), \beta(t)) \dot{\beta}(t) + u(\alpha(t), \beta(t)) \dot{\alpha}(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} u(\alpha(t), \beta(t)) \\ -v(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} dt \\ &\quad + i \int_a^b \begin{pmatrix} v(\alpha(t), \beta(t)) \\ u(\alpha(t), \beta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix} ds + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix} ds, \end{aligned}$$

wobei wir γ in der letzten Zeile mit dem Kurvenstück $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ identifiziert haben.

Mit dieser reellen Interpretation komplexer Integrale können wir nun (mit einer kleinen Einschränkung) sofort den zentralen Satz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen beweisen:

Cauchyscher Integralsatz: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, deren Abschluß \bar{G} ganz in D liege. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds.$$

Wir berechnen die rechts stehenden Integrale nach dem Satz von GREEN aus Kap. II, §6f):

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

und

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

In beiden Fällen verschwindet rechts der Integrand nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen. Also verschwinden die rechtsstehenden Integrale, und damit folgt die Behauptung. ■

Tatsächlich gilt der CAUCHYSche Integralsatz sogar für komplex differenzierbare Funktionen, d.h. die Stetigkeit der Ableitung ist nicht notwendig. Sie ist allerdings notwendig für den Satz von GREEN, auf den auch CAUCHY 1825 seinen Satz zurückführte. Die Verallgemeinerung auf komplex differenzierbare Funktionen wurde erstmalig 1900 von dem französischen Mathematiker EDOUARD GOURSAT (1858–1936) bewiesen. Sein Beweis, wie auch andere zwischenzeitlich gefundene Beweise,

arbeiten direkt mit komplexen Funktionen und setzen keinen der reellen Integralsätze voraus; sie wären daher für uns deutlich aufwendiger als CAUCHYs Beweis. Für praktische Anwendungen wird der obige Satz wohl meist ausreichen; die Verallgemeinerung führt allerdings zu einem erheblich besseren theoretischen Verständnis der komplexen Differenzierbarkeit: Insbesondere kann man damit zeigen, daß Holomorphie und komplexe Differenzierbarkeit tatsächlich dasselbe sind.

Aus dem CAUCHYschen Integralsatz folgt auch, daß Integrale über eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion nicht vom Integrationsweg abhängen, sondern nur von dessen Endpunkten: Sind nämlich γ_1 und γ_2 zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, so bildet γ_1 zusammen mit der rückwärts durchlaufenen Kurve γ_2 eine geschlossene Kurve γ , auf die der CAUCHYsche Integralsatz anwendbar sein sollte. Etwas problematisch ist dabei nur die Bedingung, daß γ Randkurve einer offenen Menge sein soll. Für konkrete Kurven ist das selten ein Problem, auch wenn man (falls sich γ_1 und γ_2 schneiden) meist mit mehreren geschlossenen Kurven argumentieren muß. Der allgemeine Fall ist mathematisch etwas aufwendiger und braucht insbesondere auch den JORDANSchen Kurvensatz; auf Einzelheiten sei daher hier verzichtet.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß auch im Komplexen ein Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt, nämlich

Satz: Zur Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ gebe es eine komplex differenzierbare Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Weiter sei γ eine in D liegende Kurve mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2 . Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Zum Beweis genügt es, ein Kurvenstück $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zu betrachten. Wir schreiben

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{und} \quad F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y);$$

da F holomorph ist, folgt

$$u(x, y) = U_x(x, y) = V_y(x, y) \quad \text{und} \quad v(x, y) = -U_y(x, y) = V_x(x, y).$$

Damit ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds.$$

Nun erinnern wir uns an die Definition eines reellen Linienintegrals: Ein Vektorfeld wird integriert, indem man es in jedem Punkt von γ mit dem dortigen Tangentenvektor skalar multipliziert und dieses Produkt über $[a, b]$ integriert. Schreiben wir $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, so ist der Tangentenvektor gleich $\begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix}$. Damit folgt

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \begin{pmatrix} U_x(\alpha(t), \beta(t))\dot{\alpha}(t) + U_y(\alpha(t), \beta(t))\dot{\beta}(t) \end{pmatrix} dt$$

und

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} ds = \int_a^b \begin{pmatrix} V_x(\alpha(t), \beta(t))\dot{\alpha}(t) + V_y(\alpha(t), \beta(t))\dot{\beta}(t) \end{pmatrix} dt.$$

Die rechtsstehenden Integranden sind nach der Kettenregel gleich

$$\frac{d}{dt} U(\alpha(t), \beta(t)) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} V(\alpha(t), \beta(t)),$$

die Integrale also nach dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich

$$U(\alpha(b), \beta(b)) - U(\alpha(a), \beta(a)) \quad \text{und} \quad V(\alpha(b), \beta(b)) - V(\alpha(a), \beta(a)).$$

Alles zusammen ergibt das Endergebnis

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \left(U(\alpha(b), \beta(b)) + iV(\alpha(b), \beta(b)) \right) \\ &\quad - \left(U(\alpha(a), \beta(a)) + iV(\alpha(a), \beta(a)) \right) \\ &= F(\alpha(b) + i\beta(b)) - F(\alpha(a) + i\beta(a)) = F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

■

e) Die Cauchysche Integralformel und der Logarithmus

Beim Beweis des CAUCHYSchen Integralsatzes mußten wir die Holomorphie von f im gesamten Bereich D voraussetzen; nur so waren die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes von GREEN gegeben. Tatsächlich liegt es nicht nur an der Beweismethodik, daß wir diese Voraussetzung brauchen, sondern der Satz kann definitiv falsch werden, wenn die Funktion auch nur in *einem* Punkt des Innengebiets G von γ undefiniert ist.

Als Beispiel dazu betrachten wir die Funktion $f(z) = 1/z$ auf dem Einheitskreis $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto e^{it}$ und fragen nach dem Integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Auf dem Umweg über das Reelle läßt sich dieses Integral leicht ausrechnen: Wegen $\dot{\gamma}(t) = ie^{it} = i\gamma(t)$ ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} i dt = 2\pi i.$$

Nach dem Satz vom Ende des letzten Abschnitts können wir so ein Integral auch rein komplex berechnen, wenn wir eine Stammfunktion von f kennen; hier sollte das der (bislang noch nicht als komplexe Funktion eingeführte) natürliche Logarithmus sein. Wenn wir den als holomorphe Funktion auf \mathbb{C} oder zumindest $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren könnten, ließe sich der Satz anwenden und das Integral wäre Null – im Widerspruch zum gerade berechneten Ergebnis. Also muß es offensichtlich Probleme mit dem komplexen Logarithmus geben.

An der Ableitung des Logarithmus kann es nicht liegen: Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist eine unmittelbare Folgerung aus der Kettenregel und gilt daher im Komplexen genauso wie im Reellen. Falls wir also den natürlichen Logarithmus $\ln z$ als eine Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definieren können, hat er die Ableitung $1/z$.

Mit der Definition als Umkehrfunktion allerdings gibt es Probleme: Im Reellen ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend, also insbesondere injektiv, und damit ist klar, daß es genau eine Umkehrfunktion gibt, eben den natürlichen Logarithmus.

Im Komplexen dagegen ist die Exponentialfunktion nicht mehr injektiv: Auf Grund der Beziehung $e^{2\pi i} = 1$ ist $e^z = e^{z+2k\pi i}$ für jede ganze Zahl k , es gibt also unendlich viele komplexe Zahlen, die von der Exponentialfunktion allesamt auf denselben Wert abgebildet werden. Wie man mit so einem Problem umgeht, ist aus der reellen Analysis bekannt: Der Sinus ist schließlich auch nicht injektiv; zur Definition seiner Umkehrfunktion, des Arkussinus, wird er einfach eingeschränkt auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, das er bijektiv auf $[-1, 1]$ abbildet; diese Einschränkung hat dann eine wohldefinierte Umkehrfunktion $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Um bei der komplexen Exponentialfunktion genauso vorgehen zu können, müssen wir zunächst eine Teilmenge von \mathbb{C} finden, auf der sie injektiv ist.

Ist $e^{z_1} = e^{z_2}$ für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 , so ist $e^{z_1 - z_2} = 1$, es reicht also, alle $z \in \mathbb{C}$ zu bestimmen, für die $e^z = 1$ ist. Aus $e^{x+iy} = 1$ folgt zunächst, daß $|e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x = 1$ sein muß, also $x = 0$. Damit muß auch $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$ sein, also $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$, was genau für die ganzzahligen Vielfachen von 2π gilt. Also ist $e^{z_1} = e^{z_2}$ genau dann, wenn sich z_1 und z_2 um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

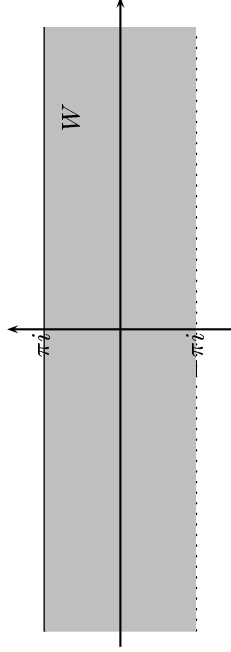
Damit ist die komplexe Exponentialfunktion injektiv beispielsweise auf der Menge

$$W = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi < y \leq \pi\}$$

wie auch auf jedem anderen Streifen der Breite 2π parallel zur reellen Achse, der nicht beide Begrenzungslinien enthält, denn zwei Punkte aus einer solchen Menge können unmöglich die Differenz $2\pi i$ haben.

Wir wollen uns überlegen, daß die Exponentialfunktion W bijektiv abbildet auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: Jede Zahl $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ läßt sich schreiben als $w = re^{i\varphi}$ mit einer reellen Zahl $r = |w| > 0$ und einem Winkel φ

mit $-\pi < \varphi \leq \pi$. (Dies entspricht einfach der Darstellung in reellen Polarkoordinaten.) Zu r gibt es eine reelle Zahl x mit $e^x = r$, nämlich $x = \ln r$, und damit ist $e^{x+i\varphi} = w$.



Definition: Der Hauptwert $\text{Ln } z$ des natürlichen Logarithmus der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl $w \in W$ mit $e^w = z$, d.h. die einzige Lösung der Gleichung $e^w = z$ mit $-\pi < \text{Im } w \leq \pi$.

Der so definierte Logarithmus ist aber leider nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn für eine negative reelle Zahl x ist $\text{Ln } x = \ln |x| + \pi i$, für benachbarte Zahlen der Form $x - i\varepsilon$ mit kleinem $\varepsilon > 0$ aber liegt $\text{Ln}(x - i\varepsilon)$ in der Nähe von $\ln |x| - \pi i$. Der Hauptwert des natürlichen Logarithmus ist also unstetig auf der negativen reellen Achse; überquert man diese, springt er um $2\pi i$.

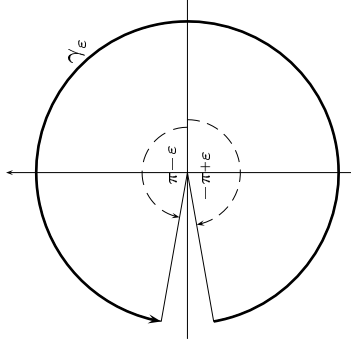
Der Satz am Ende des letzten Abschnitts ist nur anwendbar, wenn wir eine auf dem ganzen Integrationsweg holomorphe Stammfunktion haben; da der Einheitskreis die negative reelle Achse schneidet, ist das hier nicht der Fall. Der Satz wird aber anwendbar, wenn wir den Integrationsweg ein bißchen verkürzen: Das Kurvenstück

$$\gamma_\varepsilon: [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}; \quad t \mapsto e^{it}$$

schneidet die negative reelle Achse nirgends, so daß $\text{Ln } z$ auf und um γ_ε eine holomorphe Stammfunktion von $1/z$ ist.

Damit können wir den am Ende des vorigen Abschnitts bewiesenen Satz anwenden und erhalten

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \text{Ln } e^{i(\pi-\varepsilon)} - \text{Ln } e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) = 2i(\pi - \varepsilon).$$



Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert dies gegen $2\pi i$, wie zu erwarten erhalten wir also auch auf diesem Weg das Ergebnis

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Insbesondere reicht also schon ein einziger Punkt von G , in dem $f(z)$ nicht definiert ist, um die Behauptung des CAUCHYSCHEN Integralsatzes falsch zu machen.

Das obige Beispiel läßt sich noch stark verallgemeinern: Zunächst können wir anstelle des Einheitskreises auch jeden anderen Kreis um den Nullpunkt betrachten, denn da für $-\pi < t \leq \pi$ und $r > 0$

$$\text{Ln}(re^{it}) = \ln r + it$$

ist, hebt sich der Term $\ln r$ in obiger Rechnung einfach weg.

Als nächstes können wir den Nullpunkt durch einen anderen festen Punkt $w \in \mathbb{C}$ ersetzen; für einen Kreis

$$\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}; \quad t \mapsto w + re^{it} \quad \text{mit } r > 0$$

ist dann

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$$

und noch etwas allgemeiner

$$\int_{\gamma} \frac{a}{z-w} dz = a \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i \cdot a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C}.$$

Tatsächlich können wir den Kreis sogar ersetzen durch *irgendeine* geschlossene doppelpunktfreie Kurve γ , die ein beschränktes Gebiet G berandet und die im mathematisch positiven Sinne, dem Gegenuhreigersinn also, durchlaufen wird; auch dann ist für jeden inneren Punkt w von G

$$\int_{\gamma} \frac{a}{z-w} dz = 2\pi i \cdot a.$$

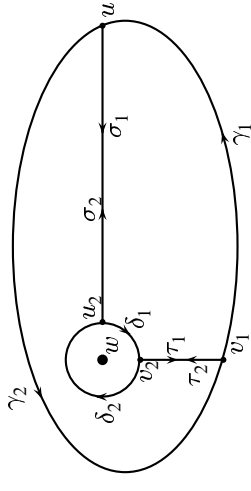
Der Beweis dieser Tatsache ist etwas umfangreicher; im Hinblick auf die nächste Verallgemeinerung wollen wir ihn gleich etwas allgemeiner führen und das Ergebnis als Lemma festhalten:

Lemma: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, die sie im Gegenuhreigersinn umlaufe, und deren Abschluß \bar{G} ganz in D liege. Dann ist für jeden inneren Punkt $w \in G$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w} dz \quad \text{mit } \kappa: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto w + re^{it} \end{cases},$$

wobei r so gewählt ist, daß die Kreisscheibe um w mit Radius r ganz in G liegt.

Beweis: Wir wählen geeignete Punkte u_1, v_1 auf γ sowie u_2, v_2 auf κ derart, daß es Verbindungskurven von u_1 nach u_2 und von v_1 nach v_2 gibt, die (abgesehen von den Endpunkten u_2, v_2) ganz in G verlaufen und weder sich selbst noch einander schneiden.



Wir bezeichnen das Kurvenstück von u_1 nach u_2 mit σ_1 und das rückwärts durchlaufene Kurvenstück mit σ_2 ; entsprechend sei das Kurvenstück von v_1 nach v_2 mit τ_1 und die Gegenrichtung mit τ_2 bezeichnet. Außerdem sei γ_1 der Teil von γ zwischen u_1 und v_1 und γ_2 der zwischen v_1 und u_1 , jeweils im Gegenuhreigersinn durchlaufen. Auf dem Kreis κ bewegen wir uns ausnahmsweise *im Uhrzeigersinn*; um Verwechslungen mit der üblichen Umlaufrichtung zu vermeiden, verwenden wir dazu einen neuen Buchstaben und bezeichnen das Stück zwischen u_2 und v_2 als δ_1 , das zwischen v_2 und u_2 als δ_2 .

Dann können wir eine geschlossene Kurve η_1 betrachten, die von u_1 ausgehend zunächst mit dem Kurvenstück σ_1 nach u_2 geht, dann entlang δ_1 nach v_2 und mit τ_1 nach v_1 , um dann mit γ_1 nach u_1 zurückzukehren.

Entsprechend können wir auch eine geschlossene Kurve η_2 betrachten, die nacheinander die Kurvenstücke $\gamma_2, \tau_2, \delta_2, \sigma_2$ durchläuft.

Beide Kurven enthalten den Punkt w nicht in ihrem Innengebiet; nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz ist daher

$$\int_{\eta_1} \frac{f(z) dz}{z-w} = \int_{\eta_2} \frac{f(z) dz}{z-w} = 0.$$

Wenn wir die Kurvenstücke einsetzen heißt dies, daß

$$\int_{\sigma_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\tau_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\gamma_1} \frac{f(z) dz}{z-w} = 0$$

und

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\tau_2} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\sigma_2} \frac{f(z) dz}{z-w} = 0$$

sind. Addieren wir die beiden Gleichungen und beachten, daß sich die Integrale über σ_1 und σ_2 sowie über τ_1 und τ_2 jeweils gegenseitig wegheben, erhalten wir die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\delta_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z) dz}{z-w} = 0.$$

δ_1 und δ_2 ergänzen einander zu einem im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis; das Integral über diesen ist gleich minus dem Integral über den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis, also über κ :

$$\int_{\delta_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\delta_2} \frac{f(z) dz}{z-w} = - \int_{\kappa} \frac{f(z) dz}{z-w}.$$

Außerdem ist

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-w} = \int_{\gamma_1} \frac{f(z) dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{f(z) dz}{z-w},$$

insgesamt also $\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-w} - \int_{\kappa} \frac{f(z) dz}{z-w} = 0$, wie behauptet. ■

Speziell für $f(z) \equiv a$ erhalten wir die angekündigte Formel

$$\int_{\gamma} \frac{a}{z-w} dz = 2\pi i \cdot a.$$

Diese Formel gilt insbesondere auch für eine Kreislinie γ und *irgendeinen* Punkt w im Kreisinnern; w muß also, wie wir schon oben gesehen haben, nicht unbedingt Mittelpunkt sein.

Um das Lemma für eine beliebige Funktion f anwenden zu können, müssen wir nur noch das Integral längs einer geeigneten Kreislinie ausrechnen; dies führt auf die

Cauchysche Integralformel: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve γ sei Randkurve einer offenen Teilmenge $G \subset D$, die sie im Gegenuhrzeigersinn umlaufe, und deren Abschluß \bar{G} ganz in D liege. Dann ist für jeden Punkt $w \in G$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i \cdot f(w).$$

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist für jede Kreislinie

$$\kappa: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto w + re^{it} \end{cases} \text{ um } w \text{ mit hinreichend kleinem Radius } r$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Die rechte Seite ist nach Definition eines komplexen Integrals gleich

$$\begin{aligned} \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\kappa(t))}{\kappa(t)-w} \dot{\kappa}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(w+re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} f(w+re^{it}) dt. \end{aligned}$$

Diese Formel gilt für alle hinreichend kleinen Radien r ; insbesondere gilt sie also auch für $r \rightarrow 0$. Dann geht der Integrand aber gegen den konstanten Wert $f(w)$, d.h.

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{\kappa} \frac{f(z)}{z-w} dz = i \int_{-\pi}^{\pi} f(w) dt = 2\pi i \cdot f(w),$$

wie behauptet. ■

Man beachte, daß zur direkten Berechnung des Integrals aus der CAUCHYSchen Formel nur die Funktionswerte von f auf der Randkurve bekannt sein müssen und daß man damit trotzdem den Funktionswert für jeden beliebigen inneren Punkt berechnen kann!

f) Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen

Als erste Anwendung der CAUCHYSchen Integralformel wollen wir uns überlegen, daß jede holomorphe Funktion in der Umgebung eines jeden Punktes ihres Definitionsbereichs durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Dazu schreiben wir die CAUCHYSche Integralformel um als

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Die geschlossene Kurve γ sei dabei der im Gegenzeigersinn durchlaufene Rand irgendeines Gebiets, dessen Abschluß noch im Holomorphiegebiet von f liegt, beispielsweise ein hinreichend kleiner Kreis um w .

Bislang hatten wir w immer als konstant angenommen; da w aber beliebig im Innern des von γ berandeten Gebiets variieren kann, spricht nichts dagegen, auch w als Variable zu betrachten. Tatsächlich wird im folgenden w die eigentlich interessante Variable sein, wohingegen die Integrationsvariable z nur noch eine Hilfsfunktion hat. Um dies auch optisch zu unterstreichen, vertauschen wir die beiden Variablennamen und schreiben die CAUCHYSche Integralformel noch einmal um in

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Nun entwickeln wir den Integranden in eine Potenzreihe:

Auch im Komplexen gilt die Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

denn bei deren Herleitung via

$$(1-q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - q \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

kann q genauso gut eine komplexe wie eine reelle Zahl sein. Für $|q| < 1$ können wir auch wie im Reellen n gegen ∞ gehen lassen und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |w - z_0|$ ist daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \\ &= \frac{1}{w-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die CAUCHYSche Integralformel ein, folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{k+1}} \cdot (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \end{aligned}$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{k+1}}.$$

Obwohl wir f nur als holomorph, d.h. einmal (komplex) stetig differenzierbar vorausgesetzt haben, konnten wir die Funktion also in eine TAYLOR-Reihe entwickeln! Damit sollte sie insbesondere auch beliebig oft differenzierbar sein, und in der Tat können wir die TAYLOR-Reihe auch in der aus der reellen Analysis vertrauten Weise mit Ableitungen schreiben:

Satz: Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist f auf D beliebig oft stetig differenzierbar und sogar

analytisch. Genauer gilt für jeden Punkt $z_0 \in D$ und jeden Punkt z aus einer offenen Kreisscheibe um z_0 , deren Abschluß ganz in D liegt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{k+1}},$$

wobei γ irgendeine Kreislinie in D um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt.

Beweis: Wir haben gerade gesehen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{k+1}}.$$

Die rechts stehende Potenzreihe entstand durch Integration einer geometrischen Reihe; sie ist also absolut und gleichmäßig konvergent und damit beliebig oft differenzierbar im Innern des Kreises γ . Damit ist f dort beliebig oft differenzierbar, insbesondere also beliebig oft stetig differenzierbar, mit k -ter Ableitung

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=k}^{\infty} \ell(\ell-1)\cdots(\ell-(k-1)) a_{\ell} (z - z_0)^{\ell-k}.$$

Für $z = z_0$ verschwinden rechts alle Summanden außer dem ersten, d.h.

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k \quad \text{und} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Damit können wir die Reihe in gewohnter Weise schreiben, und ein Vergleich der beiden Formeln für a_k zeigt auch die behaupteten Integraldarstellungen der Ableitungen. ■

An diesem Satz zeigt sich deutlich, wie grundverschieden reelle und komplexe Analysis sind: Im Reellen gibt es Funktionen, die n -fach differenzierbar sind, nicht aber $(n+1)$ -fach; einfachstes Beispiel ist $f_n(x) = x^{n-1}|x|$ für $x = 0$. Außerdem gibt es reelle Funktion wie $f(x) = e^{-1/x^2}$, in den Nullpunkt fortgesetzt durch $f(0) = 0$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind, aber (hier für $x = 0$) nicht durch eine

TAYLOR-Reihe dargestellt werden können. (Als komplexe Funktion kann $f(z) = e^{-1/z^2}$ nicht stetig in den Nullpunkt hinein fortgesetzt werden, denn beispielsweise konvergiert $f(x)$ für eine reelle Nullfolge zwar gegen Null, für eine rein imaginäre aber gegen ∞ .)

Im Komplexen folgt, wie wir gesehen haben, aus der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit bereits, daß die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar und überall durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar ist. Tatsächlich reicht sogar die gewöhnliche komplexe Differenzierbarkeit, d.h. die CAUCHY-RIEMANNSSCHEN Differentialgleichungen; um das zu beweisen, hätten wir uns allerdings beim CAUCHYSCHEN Integralsatz nicht mit CAUCHYS Beweis zufrieden geben dürfen, sondern hätten mehr arbeiten müssen. So haben wir nur bewiesen, daß aus den CAUCHY-RIEMANNSSCHEN Differentialgleichungen *und* der Stetigkeit der beiden partiellen Ableitungen die Existenz *aller* komplexer Ableitungen und die Darstellbarkeit durch eine TAYLOR-Reihe folgt.

g) Meromorphe Funktionen

Der Integrand $f(z) = \frac{1}{z-w}$ der CAUCHYSCHEN Integralformel ist natürlich nicht holomorph auf ganz \mathbb{C} ; für $z = w$ ist er nicht einmal definiert. Allgemeiner ist die Funktion $f_n(z) = \frac{1}{(z-w)^n}$ für jede natürliche Zahl n bei $z = w$ nicht definiert und damit erst recht nicht holomorph.

Trotzdem handelt es sich hier um relativ harmlose Ausnahmepunkte: Wenn wir $f_n(w) = \infty$ setzen, haben wir das Verhalten der Funktion ziemlich genau beschrieben. Das Symbol „ ∞ “ für Unendlich soll dabei ein Element bezeichnen, das wir zu \mathbb{C} hinzunehmen. Die entstehende Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist natürlich kein Körper mehr, denn beispielsweise ist

$$1 + \infty = \infty + \pi = 2\infty = i\infty = \infty \cdot e = \infty,$$

so daß beispielsweise die Ausdrücke „ $\infty - \infty$ “ und „ ∞/∞ “ nicht sinnvoll definierbar sind. Außerdem ist hier im Komplexen $\infty = -\infty$, da wir ja nur ein Element zu \mathbb{C} hinzugefügt haben. Dies unterscheidet das „komplexe ∞ “ vom „reellen ∞ “, denn im Reellen unterscheidet man bekanntlich sehr wohl zwischen $+\infty$ und $-\infty$. Hier im Komplexen, wo

es keine Größerbeziehung gibt, wäre diese Unterscheidung jedoch sinnlos – es sei denn, wir würden für jeden Winkel φ ein eigenes Element $e^{i\varphi} \cdot \infty$ einführen, was wohl doch etwas zuviel des Guten wäre.

Man kann sich das Element ∞ anschaulich am besten vorstellen, indem man die Zahlenebene auf eine Kugel, die sogenannte RIEMANNSCHE Zahlenkugel, abbildet. Dies geschieht durch die *stereographische Projektion*:

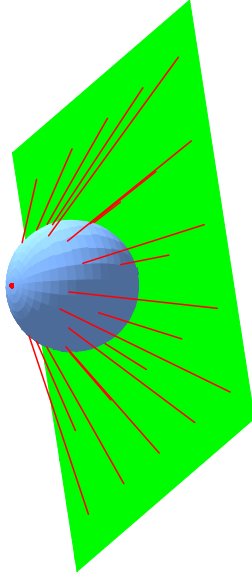


Abb. 1: Die stereographische Projektion

Dazu wird die Kugel so auf die Ebene gelegt, daß ihr Südpol gleich dem Nullpunkt ist, und jeder Punkt P der Ebene wird durch eine Gerade mit dem Nordpol verbunden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kugeloberfläche ist das Bild von P auf der Kugel. Unter dieser Abbildung entsprechen die Punkte der Ebene eindeutig den Punkten auf der Kugeloberfläche – mit Ausnahme des Nordpols. Das Bild eines Ebenenpunkts auf der Kugel liegt umso näher am Nordpol, je weiter der Punkt vom Nullpunkt der Ebene entfernt ist. Daher kann man den Nordpol der Kugel mit dem Punkt ∞ identifizieren, was in der komplexen Analysis auch in der Tat die übliche Vorgehensweise ist.

Das neue Element „ ∞ “ ist sicherlich nicht ganz unproblematisch; wir dürfen es auf keinen Fall als gleichberechtigt mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen betrachten. Insbesondere dürfen wir nicht erwarten, daß wir mit *beliebigen* Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sonderlich viel anfangen können; wir müssen uns beschränken auf Funktionen nach Art der beiden Eingangsbeispiele, bei denen die Stellen, an denen die Funktion unendlich wird, hinreichend isoliert sind und die Funktion außerhalb dieser Stellen holomorph ist:

Definition: Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn gilt:

1. Die Menge $M \subseteq D$, auf der f den Wert ∞ annimmt, hat keine Häufungspunkte.
2. Die Einschränkung

$$f_{D \setminus M}: D \setminus M \rightarrow \mathbb{C}; \quad z \mapsto f(z)$$

ist holomorph.

3. Zu jedem Punkt $w \in M$ gibt es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, so daß $g(z) = (z - w)^m f(z)$ in einer Umgebung von w holomorph ist.

Die Punkte $w \in M$ heißen *Polstellen* von f ; die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die 3. gilt, heißt *Ordnung* der Polstelle w .

Es ist klar, daß die beiden Eingangsbeispiele meromorph sind im Sinne dieser Definition: $f(z) = 1/z$ hat genau einen Pol im Nullpunkt, d.h. $M = \{0\}$; die Ordnung dieses Pols ist eins, denn $z \cdot f(z) \equiv 1$ ist (sogar auf ganz \mathbb{C}) holomorph. Entsprechend hat $g(z) = 1/(z - 2)^2$ einen Pol zweiter Ordnung bei $w = 2$ und ist in allen anderen Punkten von \mathbb{C} holomorph.

Ein Beispiel einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polstellen ist

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

Diese Funktion ist holomorph in allen Punkten, in denen der Kosinus nicht verschwindet, d.h. auf $\mathbb{C} \setminus M$ mit

$$M = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Vom Reellen her wissen wir, daß

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ist; dies gilt auch im Komplexen, denn

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots.$$

Wir müssen allerdings keine Nullstelle des Sinus, sondern die Nullstellen des Kosinus kompensieren; dazu erinnern wir uns daran, daß der

Name *Kosinus* daher kommt, daß es sich um den Sinus des Komplementärwinkels handelt, d.h. $\cos z = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$. Daher ist

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - z)}{z - \frac{\pi}{2}} = - \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(z - \frac{\pi}{2})}{z - \frac{\pi}{2}} = -1.$$

Genauso rechnet man nach, daß $\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z + \frac{\pi}{2}} = 1$ ist. Da beide Grenzwerte nicht verschwinden, folgt daraus für die Kehrwerte

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\cos z} = 1,$$

also schließlich

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \tan z = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(z - \frac{\pi}{2}) \sin z}{\cos z} = - \sin \frac{\pi}{2} = -1$$

und

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(z + \frac{\pi}{2} \right) \tan z = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(z + \frac{\pi}{2}) \sin z}{\cos z} = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1;$$

entsprechend auch an den um 2π verschobenen Stellen. Somit hat der Tangens in allen Punkten aus M Pole erster Ordnung, ist also auf ganz \mathbb{C} meromorph.

(Hier bewährt sich wieder, daß wir nur *einen* Punkt ∞ betrachten: Es wäre nicht möglich, den Tangens in sinnvoller Weise als Funktion von \mathbb{R} nach $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zu definieren, denn an jeder Polstelle ist der Grenzwert von der einen Seite gleich $-\infty$ und von der andern gleich ∞ .)

h) Laurent-Reihen

Wir wollen uns als nächstes davon überzeugen, daß auch jede meromorphe Funktion um *jeden* Punkt ihres Definitionsbereichs in so etwas ähnliches wie eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden kann, die sogenannte LAURENT-Reihe.

Betrachten wir nun eine meromorphe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und einen Punkt $z_0 \in D$. Falls f in z_0 holomorph ist, ist es auch in einer Umgebung von z_0 holomorph, also dort in eine TAYLOR-Reihe entwickelbar.

Andernfalls muß z_0 ein Pol sein; dessen Ordnung sei n . Dann ist die Funktion $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph, hat dort also eine TAYLOR-Entwicklung

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Division durch $(z - z_0)^n$ ergibt die LAURENT-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = c_{k-n}.$$

Dabei ist $a_{-n} \neq 0$, denn sonst wäre auch $(z - z_0)^{n-1} f(z)$ holomorph in einer Umgebung von z_0 , die Polstelle hätte also höchstens die Ordnung $n - 1$.

Damit folgt:

Satz: Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sei meromorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann gibt es für jeden Punkt $z_0 \in D$ eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so daß für jeden Punkt $z \neq z_0$ aus einer offenen Kreisscheibe um z_0 , deren Abschluß ganz in D liegt und außer eventuell z_0 keine Pole von f enthält, gilt:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{k+1}},$$

wobei γ irgendeine Kreislinie um z_0 ist, für die z im Kreisinnern liegt und dieses Innere keine Polstellen außer höchstens z_0 enthält. ■

PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854) war Kommandant eines Ingenieurkorps der französischen Armee und leitete unter anderem den Ausbau des Hafens von Le Havre. Seine Arbeit über die LAURENT-Reihen reichte er etwas zu spät für den großen Preis der Akademie von 1842 ein, so daß sie trotz CAUCHYs Fürsprache nicht berücksichtigt wurde. Ansonsten schrieb er anscheinend nur noch zwei weitere Arbeiten, die erst von seiner Witwe bei der Akademie eingereicht wurden. Die eine erschien 1863, die andere nie.

Eine LAURENT-Reihe unterscheidet sich somit nur dadurch von einer TAYLOR-Reihe, daß sie auch endlich viele Summanden mit negativen

Exponenten haben kann. Diese treten genau dann auf, wenn die Funktion f im Punkt z_0 einen Pol hat. Wählt man n minimal, ist also $a_{-n} \neq 0$ ist, so handelt es sich dabei offenbar genau um einen Pol n -ter Ordnung: Multipliziert man nämlich die LAURENT-Reihe mit $(z - z_0)^n$, so verschwinden alle negativen Potenzen; sie wird also zur TAYLOR-Reihe einer holomorphen Funktion. Multipliziert man dagegen mit einer kleineren Potenz von $(z - z_0)$, so steht nach a_{-n} weiterhin eine negative Potenz, das Produkt wird also für $z = z_0$ weiterhin unendlich.

Die Summe

$$H(z) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \sum_{\ell=1}^n \frac{a_{-\ell}}{(z - z_0)^\ell}$$

der Terme mit negativen Potenzen wird als *Hauptteil* der meromorphen Funktion $f(z)$ im Punkt z_0 bezeichnet; offensichtlich ist die Differenz $f(z) - H(z)$ in einer Umgebung von z_0 holomorph, da sie dort durch eine TAYLOR-Reihe dargestellt werden kann.

Über die Hauptteile einer meromorphen Funktion läßt sich die altbekannte Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen neu verstehen: Ist $f(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, Quotient zweier Polynome also, und hat der Nenner die komplexen Nullstellen z_1, \dots, z_r mit Vielfachheiten e_1, \dots, e_r , so hat die LAURENT-Reihe im Punkt z_ν einen Hauptteil der Form

$$H_\nu(z) = \sum_{k=1}^{e_\nu} \frac{a_{-k,\nu}}{(z - z_\nu)^k}.$$

Da die Differenz $f(z) - H_\nu(z)$ im Punkt z_ν holomorph ist, haben wir nach Subtraktion *aller* Hauptteile eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe rationale Funktion

$$h(z) = f(z) - \sum_{\nu=1}^r H_\nu(z);$$

das Nennerpolynom von h hat also, bei gekürzter Darstellung, keine Nullstelle. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist ein Polynom ohne komplexe Nullstelle notwendigerweise konstant, die Funktion $h(z)$

ist also ein Polynom, und wir haben die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = h(z) + H_1(z) + \dots + H_r(z).$$

Berechnet wird sie im allgemeinen natürlich nicht über die Integraldarstellung der Koeffizienten in den Hauptteilen, sondern über einem Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Ein solcher Ansatz ist aber nur gerechtfertigt, wenn die *Existenz* einer solchen Zerlegung klar ist; diese Existenz läßt sich beispielsweise mit dem EUKLIDISCHEN Algorithmus beweisen oder aber, wie hier, mit LAURENT-Reihen.

LAURENT-Reihen sind beispielsweise nützlich in der diskreten Signalverarbeitung, wo man es mit Folgen $(a_k)_{k \geq n}$ reeller oder komplexer Zahlen zu tun hat, nämlich den Werten eines Signals zu den Zeitpunkten $t = k$. Einer solchen Folge ordnet man ihre z -Transformierte

$$X(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

zu, aus der wiederum sich die Folge der a_k nach obigen Formeln rekonstruieren läßt durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{X(w) dw}{w^{k+1}}.$$

Die z -Transformation wird vor allem angewandt, um linear rekursiv definierte Folgen zu bestimmen oder (was äquivalent ist) sogenannte lineare Differenzgleichungen zu lösen. Ihre Nützlichkeit kommt daher, daß bei einer Schaltung der Zustand zu einem gegebenen Zeitpunkt meist relativ einfach als Funktion der Zustände in den vorausgegangenen Takten ausgedrückt werden kann.

Wir betrachten hier nur ein ganz einfaches Beispiel, in dem weder komplexe Zahlen noch Koeffizienten mit negativem Index auftauchen:

Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = 3a_k + 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist überall dort, wo beide Seiten konvergieren, auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3a_k + 1) z^k.$$

Mit $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist die rechte Seite gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3a_k + 1)z^k = 3X(z) + \sum_{k=0}^{\infty} 1 = 3X(z) + \frac{1}{1-z};$$

die linke ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^{k+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = \frac{X(z) - 1}{z},$$

denn $a_0 = 1$. Somit ist

$$\frac{X(z) - 1}{z} = 3X(z) + \frac{1}{1-z}$$

und

$$\left(\frac{1}{z} - 3\right) X(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z(1-z)},$$

also

$$X(z) = \frac{1}{z \frac{1}{1-3z} - 1} = \frac{1}{1-3z} = \frac{1}{(1-z)(1-3z)}.$$

Von letzterer Funktion brauchen wir die LAURENT-Entwicklung; die bekommen wir am einfachsten durch Partialbruchzerlegung: Nach der allgemeinen Theorie läßt sich der Bruch schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)(1-3z)} &= \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1-3z} = \frac{a(1-3z) + b(1-z)}{(1-z)(1-3z)} \\ &= \frac{(a+b) - (3a+b)z}{(1-z)(1-3z)}; \end{aligned}$$

a und b können also leicht berechnet werden als die Lösungen $a = -1/2$ und $b = 3/2$ des linearen Gleichungssystems $a + b = 1$ und $3a + b = 0$.

Somit ist

$$\begin{aligned} X(z) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-z} + \frac{3}{2} \frac{1}{1-3z} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (3z)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1} - 1}{2} z^k, \end{aligned}$$

und diese Reihe konvergiert für alle z mit $|z| < 1/3$. Also ist

$$a_k = \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

Für Interessenten sei noch ein geringfügig interessanteres zweites Beispiel betrachtet, die sogenannten FIBONACCI-Zahlen F_i . Sie sind durch folgende Rekursionsformel definiert:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{und} \quad F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{für } i \geq 2.$$

FIBONACCI führte sie ein, um die Vermehrung einer Karnickelpopulation durch ein einfaches Modell zu berechnen.. In seinem 1202 erschienenen Buch *Liber abaci* schreibt er:

Ein Mann bringt ein Paar Karnickel auf einen Platz, der von allen Seiten durch eine Mauer umgeben ist. Wie viele Paare können von diesem Paar innerhalb eines Jahres produziert werden, wenn man annimmt, daß jedes Paar jeden Monat ein neues Paar liefert, das vom zweiten Monat nach seiner Geburt an produktiv ist?



LEONARDO PISANO (1170–1250) ist heute vor allem unter seinem Spitznamen FIBONACCI bekannt; gelegentlich nannte er sich auch BIGOLLO, auf Deutsch *Tunichgut* oder *Reisender*. Seine Bücher waren mit die ersten, die die indisch-arabischen Ziffern in Europa einführten. Er behandelt darin nicht nur Rechenaufgaben für Kaufleute, sondern auch zahlentheoretische Fragen, beispielsweise daß man die Quadratzahlen durch Aufaddieren der ungeraden Zahlen erhält. Auch betrachtet er Beispiele nichtlinearer Gleichungen, die er approximativ löst, und erinnert an viele in Vergessenheit geratene Ergebnisse der antiken Mathematik.

Um die Zahlen F_i durch eine geschlossene Formel darzustellen, betrachten wir ihre z -Transformierte

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i.$$

Auf Grund der Rekursionsformel $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ für $i \geq 2$ ist

$$\sum_{i=2}^{\infty} F_i z^i = \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1} z^i + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-2} z^i = z \sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i + z^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_{i-1} z^i,$$

was wir wegen $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ auch in der Form

$$X(z) - z = zX(z) + z^2 X(z)$$

schreiben können. Auflösen nach $X(z)$ führt auch

$$X(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Um die rechte Seite als Potenzreihe in z zu schreiben, versuchen wir, sie durch Terme der Form $\frac{1}{1-q}$ darzustellen, die wir als Summen geometrischer Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ schreiben können.

Da $z^2 + z - 1 = (z + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ ist, verschwindet der Nenner für die beiden Werte

$$z = z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Ausmultiplizieren (oder der Satz von VIËTE) zeigt, daß $z_1 z_2 = z_1 + z_2 = -1$ ist, also

$$1 - z - z^2 = -(z - z_1)(z - z_2) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z_1 z_2}$$

$$= \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) = (1 + z_2 z)(1 + z_1 z).$$

Da wir die Summenformel der geometrischen Reihe besser anwenden können, wenn wir Terme der Form $(1 - q)$ haben, definieren wir die beiden neuen Zahlen

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

dann ist

$$1 - z - z^2 = (1 - \phi z)(1 - \bar{\phi} z).$$

Bemerkung: ϕ und $\bar{\phi}$ erfüllen die Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ oder $\phi^2 = \phi + 1$, d.h. ϕ ist das Verhältnis des *goldenen Schnitts*: Zwei Größen $a > b$ stehen bekanntlich in diesem Verhältnis, wenn sich $a + b$ zu a verhält wie a zu b . Für $\phi = a/b$ ist dies die Bedingung

$$1 + \phi^{-1} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi,$$

die nach Multiplikation mit ϕ zu $\phi + 1 = \phi^2$ wird.

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit der Partialbruchzerlegung von $X(z)$ beginnen: Nach der allgemeinen Theorie machen wir den Ansatz

$$X(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{\alpha}{1 - \phi z} + \frac{\beta}{1 - \bar{\phi} z} = \frac{(\alpha + \beta) - (\alpha\bar{\phi} + \beta\phi)z}{1 - z - z^2},$$

der auf die beiden Gleichungen

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha\bar{\phi} + \beta\phi = -1$$

führt. Einsetzen von $\beta = -\alpha$ in die zweite Gleichung zeigt, daß

$$\alpha(\bar{\phi} - \phi) = -\alpha\sqrt{5} = -1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ist. Also ist

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \bar{\phi} z} \right).$$

Diese beiden Summanden können wir nun als Summen geometrischer Reihen interpretieren und erhalten

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\phi}^i z^i \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^{\infty} (\phi^i + \bar{\phi}^i).$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß

$$F_i = \frac{\phi^i + \bar{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

ist, womit wir die gesuchte explizite Formel gefunden hätten.

In Zahlen ist $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$, $\bar{\phi} = 1 - \phi \approx -0,618034$ und $\sqrt{5} \approx 2,236068$; der Quotient $\bar{\phi} / \sqrt{5}$ ist also für jedes i kleiner als $1/2$. Daher können wir F_i auch einfacher berechnen als nächste ganze Zahl zu $\phi^i / \sqrt{5}$. Insbesondere folgt, daß F_i exponentiell mit i wächst.

Für weitere und interessantere Beispiele sei auf die *Elektrotechnik II* verwiesen.

i) Der Fundamentalsatz der Algebra

Wie im vorigen Abschnitt angekündigt, wollen wir uns hier überlegen, daß jedes nichtkonstante komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle hat; tatsächlich kann es sogar als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz von Liouville: Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei auf ganz \mathbb{C} holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

Beweis: Konkret sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für eine Kreislinie γ vom Radius R um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist dann nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung holomorpher Funktionen aus dem letzten Abschnitt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(z-w)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+Re^{it})}{(Re^{it})^2} iRe^{it} dt,$$

also

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{f(w)dw}{(z-w)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z+Re^{it})}{R^2} \right| dt \leq \frac{M}{R}.$$

Da $f(z)$ auf ganz z holomorph ist, können wir den Radius R beliebig groß wählen, also muß $f'(z)$ überall verschwinden. Dann muß aber f selbst konstant sein. ■



JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) war Sohn eines Kapitäns aus NAPOLEONS Armee. Er kam 1825 an die Ecole Polytechnique, wo er unter anderem Vorlesungen von AMPÈRE hörte. 1831 wurde er Assistent bei AMPÈRES Nachfolger MATHIEU; später lehrte er unter anderem am Collège de France und an der Ecole Polytechnique. Nach der 1848er Revolution war er (als gemäßigtter Republikaner) kurz Mitglied der Nationalversammlung. Seine über 400 Arbeiten befassen sich unter anderem mit der Zahlentheorie, mit Differentialgleichungen, Differentialoperatoren, Differentialgeometrie, Statistischer Mechanik und Astronomie.

Der Satz von LIOUVILLE zeigt wieder einmal, wie deutlich sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden: Im Reellen kennen wir schließlich eine ganze Reihe beschränkter Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, von denen viele nicht nur beliebig oft differenzierbar, sondern auch analytisch, d.h. um jeden Punkt durch eine Potenzreihe darstellbar sind: Bekannte Beispiele sind etwa

$$f(x) = \arctan x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad h(x) = e^{-x^2}.$$

Die erste dieser Funktionen ist nicht als stetige Funktion auf ganz \mathbb{C} definierbar, und die beiden anderen sind zwar holomorph auf ganz \mathbb{C} , aber im Komplexen nicht mehr beschränkt: $g(z)$ geht für $z \rightarrow \pm i$ gegen Unendlich, und $h(z)$ wegen $h(ix) = e^{-x^2}$ für Argumente mit immer größer werdendem Imaginärteil.

Ein Polynom $f(z)$ ist natürlich auf ganz \mathbb{C} holomorph; es ist allerdings i.a. nicht beschränkt. Wenn es aber keine Nullstellen hat, ist auch $1/f(z)$ auf ganz \mathbb{C} holomorph, und diese Funktion ist beschränkt: Für konstantes f ist das trivial, und für ein nichtkonstantes Polynom ist stets

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty, \quad \text{also} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Somit gibt es zu jeder positiven Zahl M_1 einen Radius $R > 0$, so daß $|1/f(z)| < M_1$ für $|z| > R$.

Die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also muß dort die stetige Funktion $|1/f(z)|$ ihr Maximum M_2 annehmen, und für das Maximum M der beiden Werte M_1 und M_2 gilt

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von LIOUVILLE ist daher $1/f(z)$ konstant, also auch $f(z)$ selbst. Damit folgt der

Fundamentalsatz der Algebra: a) Jedes nichtkonstante Polynom f mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle. b) Genauer läßt sich ein komplexes Polynom vom Grad n schreiben als

$$f(z) = a(z - z_1)^{e_1} (z - z_2)^{e_2} \dots (z - z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \dots + e_r = n$.

Zum *Beweis* müssen wir nur noch *b*) betrachten; wir zeigen diese Aussage durch vollständige Induktion nach dem Grad von *f*.

Ein Polynom vom Grad Null ist konstant, d.h. $f(z) = a$, und das ist bereits von der gewöhnlichsten Form. Auch die Summenformel gilt in diesem Fall triviale Weise.

Für $n > 0$ hat *f* mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$. Diese können wir abdividieren, d.h. wir dividieren das Polynom $f(z)$ mit Rest durch $z - z_0$:

$$f(z) : (z - z_0) = g(z) \text{ Rest } R(z).$$

Dabei hat der Rest $R(z)$ kleineren Grad als der Divisor $(z - z_0)$, d.h. $R(z) = c$ ist ein konstantes Polynom. Somit ist

$$f(z) = (z - z_0)g(z) + R(z) = (z - z_0)g(z) + c$$

mit einer komplexen Zahl *c*. Speziell für $z = z_0$ erhalten wir die Beziehung

$$f(z_0) = c;$$

da z_0 eine Nullstelle von *f* ist, folgt $c = 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)g(z).$$

Damit ist $g(z)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$, auf das wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können:

$$g(z) = a(z - z_1)^{e_1} (z - z_2)^{e_2} \cdots (z - z_r)^{e_r}$$

mit $a, z_\nu \in \mathbb{C}$ und $e_1 + e_2 + \cdots + e_r = n - 1$ und

$$f(z) = a(z - z_0)(z - z_1)^{e_1} (z - z_2)^{e_2} \cdots (z - z_r)^{e_r}.$$

Unabhängig davon, ob z_0 gleich einem der anderen z_i ist oder nicht ist das eine Darstellung der verlangten Form, in der sich die Exponenten zu *n* ergänzen, und damit ist der Satz bewiesen. ■

Die Aussage über die Summe der Exponenten kann auch so interpretiert werden, daß ein komplexes Polynom vom Grad *n* mit Vielfachheiten gerechnet genau *n* Nullstellen hat.

Für reelle Polynome folgt:

Korollar: Jedes reelle Polynom $f(x)$ läßt sich schreiben als Produkt

$$f(x) = a(x - x_1)^{e_1} \cdots (x - x_r)^{e_r} q_1^{d_1} \cdots q_s^{d_s}$$

mit reellen Zahlen a, x_ν , und quadratischen reellen Polynomen q_μ , die keine reelle Nullstellen haben. Dabei ist

$$\deg f = \sum_{\nu=1}^r e_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^s d_\mu.$$

Beweis: Über den komplexen Zahlen zerfällt *f* in Linearfaktoren. Die Linearfaktoren zu reellen Nullstellen können einfach übernommen werden. Im Falle einer komplexen Nullstelle z_μ ist, da *f* reelle Koeffizienten hat, auch \bar{z}_μ eine Nullstelle derselben Vielfachheit, und

$$q_\mu = (z - z_\mu)(z - \bar{z}_\mu) = z^2 - (2\Re z_\mu)z + |z_\mu|^2$$

ist ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten, aber ohne reelle Nullstelle. ■

j) Der Residuensatz

Der CAUCHYSche Integralsatz gilt nicht für meromorphe Funktionen: Wie wir oben gesehen haben, liefert bereits $f(z) = 1/z$ ein Gegenbeispiel. In gewisser Weise ist das aber bereits das *einzige* Gegenbeispiel: Für $n \geq 2$ hat $1/z^n$ die Stammfunktion $1/(n - 1)z^{n-1}$, und die ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, d.h.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^n} = 0$$

für jede geschlossene Kurve γ , die nicht durch 0 geht. Falls daher eine Funktion im durch γ begrenzten Bereich *G* nur eine einzige Polstelle z_0 hat und der Hauptteil dort gleich

$$H(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

ist, können wir $f(z) = g(z) + H(z)$ zerlegen in diesen Hauptteil und eine in ganz G holomorphe Funktion $g(z)$. Nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz + \int_{\gamma} H(z) dz = \int_{\gamma} H(z) dz.$$

Dies läßt sich weiter ausrechnen als

$$\int_{\gamma} H(z) dz = \sum_{k=1}^n a_{-k} \frac{dz}{(z - z_0)^k} = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i a_{-1}.$$

Von daher ist klar, daß der Koeffizient a_{-1} eine besondere Rolle spielt und einen eigenen Namen verdient:

Definition: a) Für eine meromorphe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit LAURENT-Reihe $\sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ um die Polstelle z_0 heißt der Koeffizient a_{-1} von $1/(z - z_0)$ das *Residuum* von f im Punkt z_0 ; in Zeichen

$$a_{-1} = \text{Res}_{z_0} f.$$

Demnach ist also in der obigen Situation

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z_0} f.$$

Allgemein gilt der

Residuensatz: Die Funktion f sei meromorph in $D \subseteq \mathbb{C}$ und γ sei eine ganz in D liegende Kurve, die Rand eines beschränkten Gebiets G sei und auf der f keine Pole habe. Dann hat f in G nur endlich viele Polstellen z_1, \dots, z_r , und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \text{Res}_{z_k} f.$$

Beweis: Der Abschluß \bar{G} von G ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; daher hat jede unendliche Teilmenge von \bar{G} (mindestens) einen Häufungspunkt. Da die Polstellen einer meromorphen Funktion nach Definition keinen Häufungspunkt haben dürfen, kann es nur endlich viele Polstellen z_1, \dots, z_r geben; die zugehörigen Hauptteile seien $H_1(z), \dots, H_r(z)$. Dann ist

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) - H_1(z) - \dots - H_r(z)$$

eine holomorphe Funktion, also ist nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^r \int_{\gamma} H_k(z) dz$$

oder

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \int_{\gamma} H_k(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \text{Res}_{z_k} f,$$

genau wie oben im Fall einer einzigen Polstelle. ■

k) Berechnung der Residuen

Die Nützlichkeit des Residuensatzes steht und fällt damit, daß wir die auf der rechten Seite auftretenden Residuen gut berechnen können.

Das Residuum einer meromorphen Funktion f an einer Stelle z_0 ist der Koeffizient von $(z - z_0)^{-1}$ in der LAURENT-Entwicklung von f und als solcher zumindest im Prinzip berechenbar. Für die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \right) = z^{-3} - \frac{z^{-1}}{6} + \dots$$

etwa ist $\text{Res}_0 f = \frac{1}{6}$. Für die rationalen Funktionen, die wir als Hauptanwendung im Auge haben, ist diese Vorgehensweise aber im allgemeinen recht aufwendig. Hier ist oft eine teilweise Partialbruchzerlegung günstiger, aber im Falle eines Pols erster Ordnung geht alles noch viel einfacher:

In diesem Fall hat die LAURENT-Entwicklung die Form

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

also ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Dies funktioniert natürlich nur für Pole erster Ordnung, denn für Pole höherer Ordnung divergiert der rechtsstehende Grenzwert gegen unendlich.

Grundsätzlich können wir das Verfahren allerdings auch für Pole höherer Ordnung einsetzen, jedoch müssen wir dann zunächst aller anderen Koeffizienten a_{-k} mit negativem k berechnen.

Der erste dieser Koeffizienten ist im Falle eines Pols n -ter Ordnung a_{-n} ; das gleiche Argument wie oben führt sofort auf die Gleichung

$$a_{-n} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z).$$

Die Funktion $f(z) - a_{-n}/(z - z_0)^n$ ist eine meromorphe Funktion, die bei z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $n - 1$ hat und deren LAURENT-Koeffizienten abgesehen von a_{-n} mit denen von f übereinstimmen. Somit ist

$$\begin{aligned} a_{-(n-1)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n-1} \left(f(z) - \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0)^{n-1} f(z) - \frac{a_{-n}}{z - z_0} \right). \end{aligned}$$

Die Funktion $f(z) - a_{-n}/(z - z_0)^n - a_{-(n-1)}/(z - z_0)^2$ hat in z_0 höchstens einen Pol ($n - 2$ -ter Ordnung, also können wir mit einer entsprechenden Formel $a_{-(n-2)}$ berechnen und so weiter, bis wir bei a_{-1} angekommen sind.

1) Ein erstes Beispiel

Als erste Anwendung des Residuensatzes betrachten wir

$$\int_{\gamma} \frac{z^5 + 1}{z^4 - 1} dz \quad \text{für } \gamma: \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it}. \end{cases}$$

Der Nenner hat die vier Nullstellen ± 1 und $\pm i$, die allesamt im Innern des Kreises mit Radius zwei um den Nullpunkt liegen, über den wir integrieren. $z = -1$ ist allerdings auch Nullstelle des Zählers, und

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^5 + 1}{z^4 - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{5z^4}{4z^3} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{5z}{4} = -\frac{5}{4}$$

existiert in \mathbb{C} ; Pole gibt es also nur für $+1$ und $\pm i$. Diese Pole haben allesamt Ordnung eins, da es sich um einfache Nullstellen des Nenners handelt. Also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 f &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^5 + 1)(z - 1)}{(z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^5 + 1}{(z^2 + 1)} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Genauso bestimmt man

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i f &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^5 + 1}{(z^2 - 1)(z + i)} \\ &= \frac{i^5 + 1}{(i^2 - 1)(i + i)} = \frac{i + 1}{-4i} = \frac{-1 + i}{4} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Res}_{-i} f = \frac{(-i)^5 + 1}{((-i)^2 - 1)(-i - i)} = \frac{1 - i}{-2 \cdot (-2i)} = \frac{-1 - i}{4}.$$

Die Summe der drei Residuen ist Null, also verschwindet nach dem Residuensatz auch das Integral.

Man beachte, daß wir dieses Ergebnis nicht ohne weiteres über eine Stammfunktion bekommen hätten, denn die Stammfunktion

$$\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(z - 1) - \frac{1}{4} \operatorname{Ln}(z^2 + 1) - \frac{1}{2} \arctan z$$

ist gleich an mehreren Stellen des Integrationswegs unstetig: Für $z = -2$ überquert das Argument von $\operatorname{Ln}(z - 1)$ die negative reelle Achse, und für $z = \pm 2i$ das von $\operatorname{Ln}(z^2 + 1)$. Auch läßt sich der Arkustangens nicht als holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} definieren und sorgt so für zusätzliche Probleme.

m) Anwendung auf reelle Integrale

Auf den ersten Blick erstaunlich, gerade für Anwendungen in der Elektrotechnik aber wichtig ist die Tatsache, daß sich auch eine ganze Reihe von bestimmten Integralen im Reellen am einfachsten über den Residuensatz berechnen lassen. Dabei handelt es sich in erster Linie um uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

deren Integrand f sich zu einer auf \mathbb{C} meromorphen Funktion $f(z)$ fortsetzen läßt. Die für uns wichtigsten Beispiele sind rationale Funktionen, also Funktionen, die sich als Quotient zweier Polynome schreiben lassen, und bei denen ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt.

Komplex betrachtet ist der Integrationsweg hier die gesamte reelle Achse, und die ist natürlich alles andere als eine geschlossene Kurve, auf die wir den Residuensatz anwenden könnten.

Wir können uns aber zunächst einmal beschränken auf das Integral von $-R$ bis R für irgendeine positive reelle Zahl R , und die Strecke von $-R$ bis R durch einen Halbkreisbogen durch die komplexe obere Halbebene zum Rand eines Halbkreises und damit einer geschlossenen Kurve ergänzen. Da wir nicht wissen, wie man komplexe Integrale berechnet, deren Integrand auf dem Integrationsweg nicht überall definiert ist, müssen wir annehmen, daß der Integrand f keine Polstellen auf der reellen Achse hat, und wir müssen R so wählen, daß keine der Polstellen in der oberen Halbebene Betrag R hat. Da die Polstellen einer meromorphen Funktion keinen Häufungspunkt haben dürfen, gibt es im abgeschlossenen Halbkreis mit Rand γ_R höchstens endlich viele Pole; wir müssen also nur endlich viele Werte von R vermeiden, was kein Problem ist: Wir interessieren uns ohnehin nur für den Grenzwert, wenn R gegen ∞ geht.

Wir betrachten nun für $R > 1$ einen Integrationsweg γ_R , der zusammen-

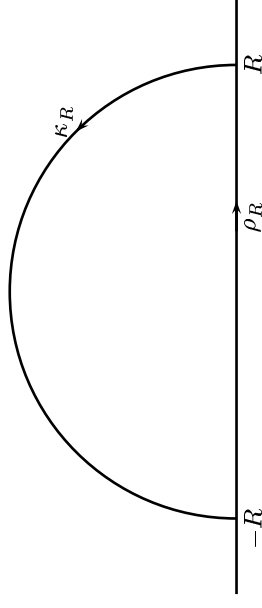
gesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg

$$\rho_R: \begin{cases} [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t \end{cases}$$

von $-R$ bis R und einem Halbkreis

$$\kappa_R: \begin{cases} [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$

in der oberen Halbebene von \mathbb{C} , der von R im Gegenzeigersinn nach $-R$ führt.



Beides zusammen bildet eine geschlossene Kurve γ_R , und nach dem Residuensatz ist das Integral über γ_R gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen an den Polen, die im Innern des Halbkreises liegen.

Leider ist in diesem Integral aber auch das Integral über κ_R enthalten, das uns nicht im geringsten interessiert. Der Ansatz ist daher nur nützlich, wenn wir dieses Integral irgendwie in den Griff bekommen können. Am einfachsten gelingt dies, wenn es für $R \rightarrow \infty$ einfach verschwindet. Bei rationalen Funktionen ist das genau dann der Fall, wenn der Zählergrad um mindestens zwei kleiner ist als der Nennergrad:

Lemma: Für zwei Polynome $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ und $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0$ mit $m \geq n + 2$ ist für κ_R

wie oben $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\kappa_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$ und falls Q keine reellen Nullstellen

hat ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen von $\frac{P(z)}{Q(z)}$ an den Polstellen mit positivem Imaginärteil.

Beweis: Nach Definition eines komplexen Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz &= \int_0^{\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(e^{it})} \cdot iRe^{it} dt \\ &= i \int_0^{\pi} \frac{a_n R^{n+1} e^{i(n+1)t} + a_{n-1} R^{n-1} e^{int} + \dots + a_1 R^2 e^{2it} + a_0 R e^{it}}{b_m R^m e^{imt} + b_{m-1} R^{m-1} e^{i(m-1)t} + \dots + b_1 R e^{it} + b_0} dt, \end{aligned}$$

und der Integrand rechts geht für $R \rightarrow \infty$ überall gegen Null, da der Grad $n+1$ des Zählers kleiner ist als der Grad m des Nenners. Da der Nenner nur endlich viele Nullstellen hat, liegen genau die mit positivem Imaginärteil für hinreichend große R im Innern eines jeden Halbkreises mit Radius R um Null in der oberen Halbebene. ■

Daraus ergibt sich folgendes *Kochrezept* für die Berechnung von Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

mit Polynomen P und Q :

1. Man überprüfe, ob der Grad des Zählers P um mindestens zwei kleiner ist als der des Nenners Q ; andernfalls ist das Verfahren nicht anwendbar.
2. Man überprüfe, ob der Nenner Q auch reelle Nullstellen hat; falls ja, ist das Verfahren nicht anwendbar.
3. Falls beide Tests erfolgreich durchlaufen wurden, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{k=1}^r 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei z_1, \dots, z_r die Nullstellen mit positivem Imaginärteil von $Q(z)$ sind.

Man beachte, daß die Nullstellen von Q mit negativem Imaginärteil keine Rolle spielen.

Betrachten wir etwa als erstes Beispiel das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Der Zähler ist konstant, hat also Grad null, und der Nenner hat Grad zwei; die erforderliche Graddifferenz von mindestens zwei ist also vorhanden. Als nächstes müssen wir die Nullstellen des Nenners bestimmen:

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \iff (x+1)^2 + 4 = 0 \iff x = -1 \pm 2i.$$

Keine dieser Nullstellen ist reell, und nur $-1 + 2i$ hat positiven Imaginärteil. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2 + 2x + 5} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1+2i} \frac{2}{z^2 + 2z + 5}.$$

(Daß hier statt x ein z steht hat rein kosmetische Gründe: Wenn es um komplexe Funktionen geht, bezeichnet man die Variable einfach gewohnheitsmäßig mit z .)

Da die beiden Nullstellen des Nenners einfach sind, haben auch die Pole nur die Ordnung eins; daher läßt sich das gesuchte Residuum einfach bestimmen als

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-1+2i} \frac{2}{z^2 + 2z + 5} &= \lim_{z \rightarrow -1+2i} \frac{2(z - (-1 + 2i))}{z^2 + 2z + 5} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+2i} \frac{2(z - (-1 + 2i))}{(z - (-1 + 2i))(z - (-1 - 2i))} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+2i} \frac{2}{z - (-1 - 2i)} = \frac{2}{-1 + 2i - (-1 - 2i)} = \frac{2}{4i} = \frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2 + 2x + 5} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

(Da wir ein reelles Integral haben, war von vornherein klar, daß das Ergebnis trotz des Umwegs über komplexe Zahlen einen reellen Wert haben muß; diese Plausibilitätskontrolle kann gegebenenfalls Rechenfehler aufdecken.)

Als etwas komplizierteres Beispiel betrachten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

Natürlich können wir via Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion des Integranden finden, allerdings müssen wir dafür doch einiges arbeiten, und das Ergebnis

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1)$$

ist alles andere als angenehm.

Um auch dieses Integral über den Residuenkalkül ausrechnen zu können, setzen wir den Integranden fort zu einer komplexen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1};$$

diese ist holomorph in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$, in denen der Nenner $z^4 + 1$ nicht verschwindet.

Nach der dritten binomischen Formel ist $(z^4 + 1)(z^4 - 1) = (z^8 - 1)$, also

$$z^4 + 1 = \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1}.$$

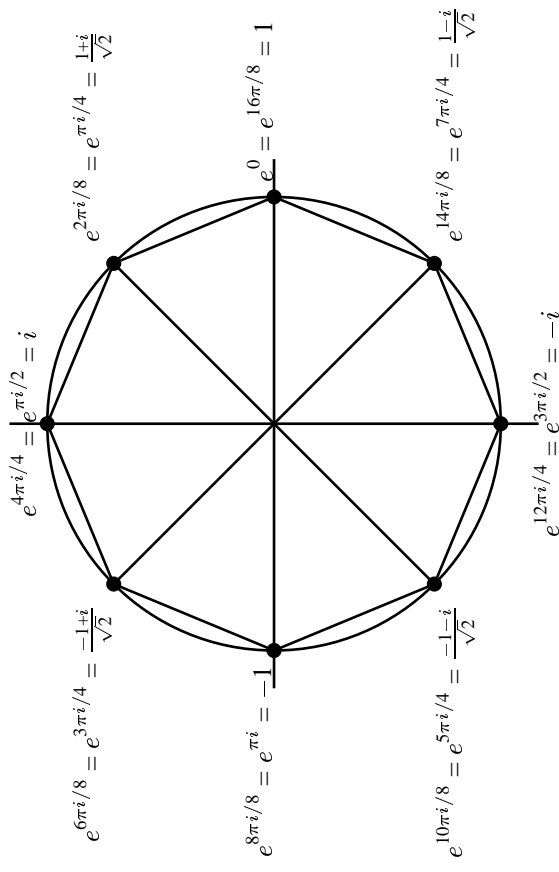
Die Nullstellen des Polynoms $z^8 - 1$ sind jene komplexen Zahlen, deren n -te Potenz gleich Eins ist; man bezeichnet sie als die n -ten Einheitswurzeln. Da ein Polynom vom Grad n über einem Körper höchstens n Nullstellen haben kann, kann es höchstens n von ihnen geben; da für jede natürliche Zahl k

$$(e^{2k\pi i/n})^n = e^{n \cdot 2k\pi i/n} = e^{2k\pi i} = 1$$

ist, gibt es genau die n Einheitswurzeln

$$1 = e^0, e^{2k\pi i/n}, e^{4k\pi i/n}, \dots, e^{(n-1)2\pi i/n}.$$

Auf dem Einheitskreis sind sie die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks, was die folgende Zeichnung für den Fall $n = 8$ illustriert:



Ist m ein Teiler von n , so ist jede m -te Einheitswurzel erst recht eine m -ten Einheitswurzel; wir bezeichnen eine n -te Einheitswurzel als *primitiv*, wenn es keinen echten Teiler m von n gibt, für den sie bereits m -te Einheitswurzel ist.

Eine achte Einheitswurzel ist offenbar genau dann primitiv, wenn sie nicht gleichzeitig vierte Einheitswurzel ist; die Nullstellen von $z^4 + 1$ sind also genau die primitiven achten Einheitswurzeln

$$e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4} \text{ und } e^{7\pi i/4},$$

von denen allerdings nur $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ positiven Imaginärteil haben.

Daher ist Nach dem Residuensatz ist daher für $R > 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f).$$

Die Residuen lassen sich, da alle Nullstellen einfach sind, wie oben bestimmen; beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{(z - e^{\pi i/4})(z + e^{\pi i/4})(z - e^{3\pi i/4})(z + e^{3\pi i/4})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4} + e^{3\pi i/4})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/2} - 2e^{3\pi i/2})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(i - (-i))} = \frac{1}{4i} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}(-1 - i), \end{aligned}$$

und genauso könnte man auch

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - i)$$

berechnen. Einfacher geht es allerdings zumindest in diesem Fall mit der Regel von DE L'HOSPITAL: Danach ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{z - e^{3\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f = \frac{e^{-3\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4}.$$

Um dies weiter auszurechnen kann man entweder, in diesem Fall sehr einfach, die Polarkoordinatendarstellungen $e^{-3\pi i/4}$ und $e^{-\pi i/4}$ verwenden, oder aber man versucht, die Summe über die EULERSchen Formeln als trigonometrische Funktion zu interpretieren:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-3\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4} &= e^{-\pi i/2} \cdot \frac{e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}}{4} = \frac{e^{-\pi i/2}}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{i\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Damit ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Für alle, die noch nie einen Beweis der DE L'HOSPITALschen Regel gesehen haben, hier zunächst eine einfache Version:

Verschwinden für zwei stetig differenzierbare Funktionen $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ für $x_0 \in U$ sowohl $f(x_0)$ als auch $g(x_0)$, nicht aber $g'(x_0)$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Zum Beweis benötigen wir lediglich die Definition der Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)}{g(x_0) + hg'(x_0) + o(h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) + o(h)/h}{g'(x_0) + o(h)/h} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt sogar etwas mehr: Wir können die Regel, hinreichend häufige Differenzierbarkeit vorausgesetzt, auch mehrfach anwenden, denn wir haben auch folgende

Verschärfung. Verschwinden für zwei stetig differenzierbare Funktionen $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ für $x_0 \in U$ sowohl $f(x_0)$ als auch $g(x_0)$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Der Beweis ist im wesentlichen derselbe, allerdings müssen wir etwas genauer rechnen und den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* anwenden: Danach gibt es zu jedem x reelle Zahlen η_x, ζ_x zwischen x_0 und x , so daß gilt

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\eta_x) \quad \text{und} \quad g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(\zeta_x).$$

Daher können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + (x - x_0)f'(\eta_x)}{g(x_0) + (x - x_0)g'(\zeta_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f'(\eta_x)}{(x - x_0)g'(\zeta_x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\eta_x)}{g'(\zeta_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \end{aligned}$$

denn $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_x = \lim_{x \rightarrow x_0} \zeta_x = x_0$.

Gelegentlich läßt sich ein reelles Integral auch über eine direkte Substitution in ein komplexes Integral über eine geschlossene Kurve überführen, beispielsweise kann ein Integral von 0 bis 2π über einen Ausdruck in $\sin t$ und $\cos t$ manchmal direkt als komplexes Integral über eine Kreislinie interpretiert und dann nach dem Residuensatz ausgerechnet werden; wie man solche Substitutionen findet, ist wie üblich Erfahrungssache, auch wenn es dazu einige Faustregeln gibt.

Als ein Beispiel dazu betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

das wir beispielsweise bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen benötigen werden. Es hat auch sonst viele Anwendungen, denn der Integrand, die sogenannte sinc-Funktion spielt in der Elektrotechnik eine große Rolle als, wie wir im entsprechenden Teil der Vorlesung sehen werden, FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses.

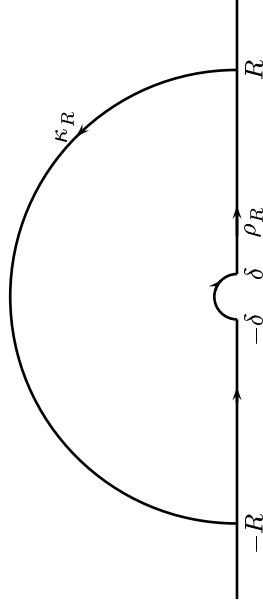
Da wir $\frac{\sin z}{z}$ auf einem Kreis um den Nullpunkt für immer größer werdenden Radius nicht abschätzen können, hat es keinen Sinn, das

Integral über einen Halbkreis zu berechnen – ganz abgesehen davon, daß es wegen der Holomorphie des Integranden ohnehin verschwindet.

Wie sich zeigen wird, kommen wir ans Ziel, wenn wir den CAUCHYSCHEN Hauptwert des etwas allgemeineren Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} dt$$

für ein reelles $\omega > 0$ berechnen, wobei im Augenblick nur der Fall $\omega = 1$ interessant ist. Dazu betrachten wir, der Philosophie dieses Abschnitts entsprechend, ein komplexes Kurvenintegral über $e^{i\omega z}/z$. Da der Integrand an der Stelle $z = 0$ eine Polstelle hat, können wir allerdings nicht einfach auf der reellen Achse von $-R$ nach R integrieren, sondern müssen den Nullpunkt auf einem kleinen Halbkreisbogen β_δ vom Radius δ umfahren. Diese Umleitung wird im Uhrzeigersinn durchlaufen:



Für $z = x + iy$ hat $e^{i\omega z} = e^{-\omega y} e^{i\omega x}$ Betrag $e^{-\omega y}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} \right| dt \\ &= \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt. \end{aligned}$$

Um die rechte Seite weiter abzuschätzen, wählen wir ein $\eta > 0$ und

schreiben

$$\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = \int_0^\eta e^{-R \sin t} dt + \int_\eta^{\pi-\delta} e^{-R \sin t} dt + \int_{\pi-\eta}^\pi e^{-R \sin t} dt.$$

Im ersten und im drittem Integral schätzen wir den Integranden ab durch eins und erhalten somit η als obere Schranke für das Integral; beim mittleren Integral ist der Integrand höchstens gleich $e^{-R \sin \eta}$. Wählen wir nun für ein $\varepsilon > 0$ den Winkel δ so, daß $\eta < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, und wählen wir dazu den Radius R so groß, daß

$$e^{-R \sin \eta} < \frac{\varepsilon}{3\pi}$$

ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq 2\eta + (\pi - 2\eta) e^{-R \sin \eta} < \varepsilon.$$

Somit verschwindet auch hier das Integral längs κ_R für $R \rightarrow \infty$.

Für $R \rightarrow \infty$ verschwindet damit auf Grund des CAUCHYSchen Integralsatzes auch

$$\int_{-\infty}^\delta \frac{e^{i\omega z}}{z} dz + \int_{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz + \int_\delta^\infty \frac{e^{i\omega z}}{z} dz$$

d.h. der CAUCHYSche Hauptwert des Integrals von $-\infty$ nach ∞ ist gleich

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz,$$

wobei α_δ den im *Gegenuhreigersinn* durchlaufenen Halbkreisbogen β_δ bezeichnet. In der Summenentwicklung

$$\int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz = \int_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-1}}{k!} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta} z^{k-1} dz$$

ist das rechtsstehende Integral für $k = 0$

$$\int_{\alpha_\delta} z^{-1} dz = \operatorname{Ln}(\delta) - \operatorname{Ln}(-\delta) = \operatorname{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ ; im Falle $k \neq 0$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta} z^{k-1} dz = \frac{\delta^k - (-\delta)^k}{k}$$

für gerade k und ist gleich $2\delta^k/k$ für ungerade k . Da die geometrische Reihe $2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \rightarrow 0$ gegen Null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz = \pi i.$$

Vergleich der Imaginärteile zeigt, daß dann für den CAUCHYSchen Hauptwert gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \pi \quad \text{für alle } \omega > 0.$$

Tatsächlich kann man sich leicht überlegen, daß dies nicht nur der CAUCHYSche Hauptwert ist, sondern daß dieses uneigentliche Integral existiert und somit den Wert π hat.

n) Harmonische Funktionen

Wie wir gesehen haben, ist (stetige) Differenzierbarkeit im Komplexen eine erheblich stärkere Forderung ist als im Reellen. Die vielen wünschenswerten Eigenschaften einer holomorphen Funktion sollten ihre Auswirkungen auf deren Real- und Imaginärteil haben, reelle Funktionen, die als Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion aufgefaßt werden können, sollten also interessante analytische Eigenschaften haben. Beispielsweise ist eine holomorphe Funktion beliebig oft stetig differenzierbar; also gilt dies auch für ihren Real- und Imaginärteil.

Wenn die zweifach differenzierbare Funktion $u(x, y)$ Realteil einer holomorphen Funktion ist und $v(x, y)$ der zugehörige Imaginärteil, so ist nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y),$$

also folgt nach dem Lemma von SCHWARZ, daß

$$u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y) = v_{xy}(x, y) = -u_{yy}(x, y),$$

d.h.

$$\Delta u(xy) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) \equiv 0.$$

Der LAPLACE-Operator, angewandt auf den Realteil einer holomorphen Funktion, liefert also die Nullfunktion.

Die Gleichung $\Delta u = 0$ dürfte den meisten aus der Physik in Erinnerung sein: Ist u ein elektrisches Potential und $\vec{E} = \nabla u$ das zugehörige elektrische Feld, so ist $\Delta u = \operatorname{div} E$, die sogenannte *Kontinuitätsgleichung* $\Delta u = 0$ besagt somit, daß ∇u ein quellenfreies Feld ist; es gibt also keine Ladungen.

Solche Funktionen spielen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle, sondern beispielsweise auch bei der Wärmeleitung und einer ganzen Reihe weiterer Anwendungen; sie haben daher einen eigenen Namen verdient (und eine umfangreiche Theorie, die sich mit ihren Eigenschaften beschäftigt).

Definition: Eine Funktion $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn dort überall gilt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Im Zweidimensionalen hängt dies eng mit holomorphen Funktionen zusammen:

Lemma: a) Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.

b) Zu jeder harmonischen Funktion $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es für jeden Punkt $(a, b) \in D$ eine Umgebung U

und eine auf U holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, so daß u auf U der Realteil von f ist.

Beweis: a) Wir haben bereits nachgerechnet, daß der Realteil einer holomorphen Funktion f harmonisch ist; da mit f auch $-if$ holomorph ist und den Imaginärteil von f als Realteil hat, gilt dasselbe für den Imaginärteil.

b) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -u_y(x, y) \\ u_x(x, y) \end{pmatrix}$$

auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq D$, die den Punkt (a, b) enthält, z.B. eine Kreisscheibe um (a, b) , die noch ganz in D liegt. Da

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

auf U identisch verschwindet, hat das Vektorfeld \vec{V} nach dem zweidimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Kap. II, §6f), eine Stammfunktion; es gibt also eine Funktion $v: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$v_x = V_1 = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = V_2 = u_x.$$

Damit erfüllt das Paar (u, v) die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen; und da die Ableitungen der zweimal stetig differenzierbaren Funktion u natürlich stetig ist, ist

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorph auf U mit u als Realteil. ■

Als Beispiel, wie Sätze über holomorphe Funktionen auf harmonische Funktionen zweier Veränderlicher übertragen werden können, sei hier nur die Mittelwertseigenschaft erwähnt:

Satz: $u(x, y)$ sei harmonisch auf einem Gebiet G , das die offene Kreisscheibe D vom Radius r um (x_0, y_0) enthalte. Dann ist

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt$$

der Mittelwert der auf der Kreislinie angenommenen Werte.

Beweis: Wie wir bereits wissen, gibt es eine holomorphe Funktion f , die u als Realteil hat. Mit $z = x + iy$ kann die CAUCHYSche Integralformel als eine Mittelwertausgabe für f interpretiert werden: Für den Integrationsweg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto z_0 + re^{it}$ ist

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} \frac{f(w + re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + re^{it}) dt \end{aligned}$$

gleich dem Mittelwert der Funktion $f(z_0 + re^{it})$ über die Kreislinie. Nimmt man auf beiden Seiten den Realteil, folgt die Behauptung. ■

§2: Reelle und komplexe Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem einfachen und anschaulichen Beispiel für den Aufbau einer komplizierten Funktion aus reinen Schwingungen; Ziel des Paragraphen wird sein, eine (fast) *beliebige* periodische Funktion möglichst exakt als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen.

a) Die schwingende Saite

Ein Ton werde erzeugt durch eine schwingende Saite. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß ihre Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als eine transversale linear polarisierte Schwingung. Zumindest in erster Näherung kann man, bei nicht zu extremer Auslenkung der Saiten, einige Musikinstrumente so beschreiben.

Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit x bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle x ist aber, da die

Saite schwingt, auch eine Funktion der Zeit. Wir haben also insgesamt eine Funktion $f(x, t)$ sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in der (x, y) -Ebene stattfindet, ist $f(x, t)$ also die y -Koordinate des Punktes mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t . Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$(x, f(x, t));$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die x -Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es noch eine z -Koordinate.

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt; wir wählen die Koordinaten auf der x -Achse so, daß diese Enden den Werten $x = 0$ und $x = L$ entsprechen, wobei $L \in \mathbb{R}$ die Länge der Saite bezeichnet. Da die Enden nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L, t) = 0$$

sein; nur für $0 < x < L$ kann $f(x, t)$ wirklich von t abhängen.

Wie könnte f aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und L verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

in Frage, wobei $A(t)$ irgendeine Funktion der Zeit ist und k eine natürliche Zahl. Abbildung zwei zeigt die entsprechenden Funktionen für $k = 1$ bis 4 und $A(t) \equiv 1$.

Bei einem realen Musikinstrument werden diese Oberschwingungen nicht alle dieselbe Amplitude haben; aus Kapitel I, §1f) etwa ist das Beispiel der g -Saite einer Geige bekannt, das hier noch einmal in Abbildung drei dargestellt ist: Die gestrichelte Kurve ist die Grundschwingung

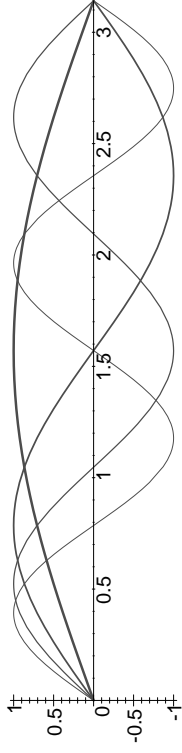


Abb. 2: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

mit Amplitude eins, die fett eingezeichnete Kurve die Gesamtschwingung, und die sonstigen Kurven sind die reinen Teilschwingungen mit ihren jeweiligen Amplituden. (Wer selbst solche Kurven konstruieren und auch die dazugehörigen Töne hören möchte, findet ein Java-Applet unter <http://www.gac.edu/~huber/fourier/>)

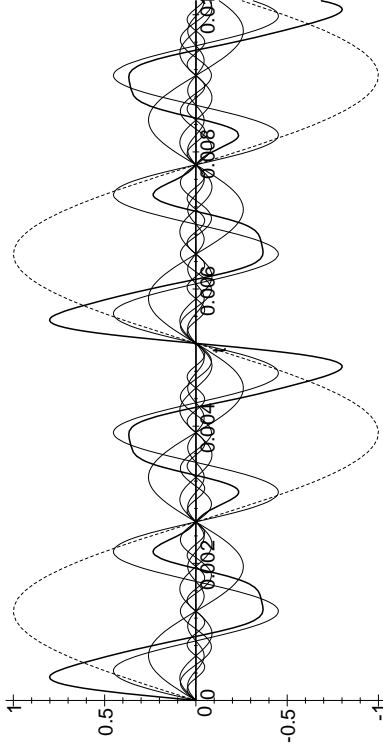


Abb. 3: Ton der g-Saite einer Geige und seine Komponenten

Offensichtlich spielt die Grundschwingung kaum eine Rolle: Wie man sowohl hier als auch genauer an der Darstellung der Größenverhältnisse der Koeffizienten in Abbildung vier sieht, sind die Schwingungen mit doppelter und dreifacher Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt, d.h. also die Oktave und vor allem die darüberliegende Quinte.

Über die zeitabhängige Auslenkungsfunktion $A(t)$ wurde bislang noch nichts gesagt; da wir periodische Schwingungen erwarten, liegt es nahe,

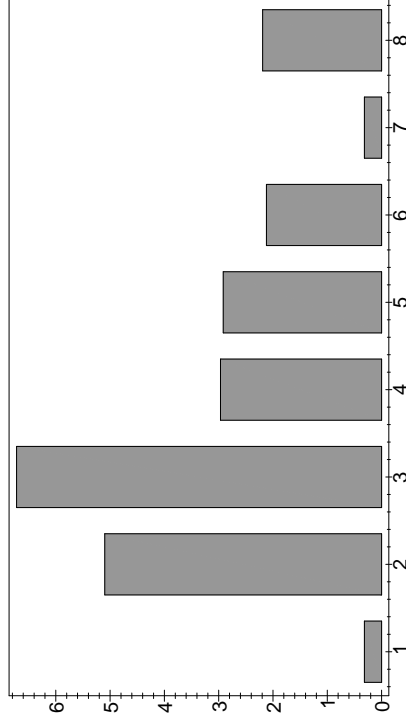


Abb. 4: Koeffizienten von Grund- und Oberschwingungen

auch hier einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen zu machen. Wenn wir die Zeitachse so festlegen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet, ist der Sinus die geeignete Funktion; wir versuchen es daher für eine reine Schwingung mit einem Ansatz der Form

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t,$$

wobei a und ω reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest ω als positiv voraussetzen können. Insgesamt erwarten wir somit im einfachsten Fall Funktionen der Form

$$f(x, t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right).$$

ω und k hängen natürlich voneinander ab: Wie jedermann aus Physik- und Musikunterricht weiß, führt ein doppelt so großer Wert von k zu einer doppelt so hohen Kreisfrequenz ω .

b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Wer sich allerdings kurz überlegt, *warum* dem so ist, wird wohl in den meisten Fällen nur auf den „Grund“ kommen, daß dies eben allgemein

bekannt sei. Tatsächlich stecken dahinter einige nicht ganz triviale Überlegungen, die man für die Zwecke dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt kennen muß, die aber für etwaige Interessenten trotzdem im Kleindruck beigefügt sind:

Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit σ .

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung*. Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge L_0 hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf eine Länge $L > L_0$ gedehnt; nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt somit eine Rückstellkraft $\lambda L/L_0$, die proportional ist zur Überdehnung L/L_0 mit der Federkonstanten λ als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur x -Achse ist, auch eine Kraftkomponente in y -Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x, t),$$

die die y -Koordinate des Punktes x angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Im Punkt x_1 habe die Tangente den Winkel α gegenüber der Horizontalen, im Punkt x_2 sei dieser Winkel β . Falls x_1 und x_2 einigermäÙen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen x_1 und x_2 in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel γ gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos \gamma},$$

den der Kosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypotenuse. Gegenüber ihrer Ruhelage ist die ausgelenkte Saite daher noch um einen weiteren (lokalen) Faktor $1/\cos \gamma$ gestreckt.

Die Rückstellkraft in Richtung der *ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \cos \gamma,$$

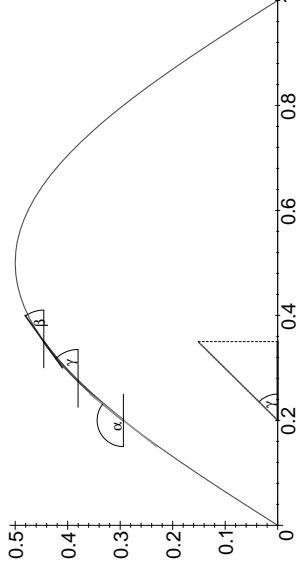


Abb. 5: Eine ausgelenkte Saite

und die Komponente in y -Richtung ist im Punkt x_1 gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \alpha$$

und im Punkt x_2 entsprechend gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \beta.$$

Da α und β bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel x benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphs einer Funktion $y = g(x)$ gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung $g'(x)$, die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2).$$

Bei einem hinreichen kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstellkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2) - \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) = \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln γ ausgehen, liegt $\cos \gamma$ sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit x -Koordinate x_0 hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(x_0, t) = f(x_0, t),$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse,

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1)$$

des gesamten Stück setzen. Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung $\dot{h}(t)$ der Auslenkung, also gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot \dot{h}(t)$$

oder

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \dot{h}(t).$$

Lassen wir nun x_2 und x_1 simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt x gehen, konvergiert die linke Seite gegen $g''(x)$, wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \dot{h}(t).$$

Damit sind wir fast fertig: wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(t)$ spezielle Werte der Funktion $f(x, t)$ berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt t ist $g(x) = f(x, t)$, und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt x auf der Saite ist $h(t) = f(x, t)$. Daher ist

$$g''(x) = f_{xx}(x, t) \quad \text{und} \quad \dot{h}(t) = f_{tt}(x, t),$$

und die Differentialgleichung der schwingenden Saite wird zu

$$f_{xx}(x, t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x, t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x, t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x, t).$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 = \frac{\lambda L}{\text{def } \sigma L_0}.$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite zu

$$f_{tt}(x, t) = c^2 f_{xx}(x, t).$$

Sie allein legt $f(x, t)$ bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind φ und ψ irgendwelche zweifach stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, so überzeugt man sich leicht (Kettenregel), daß

$$f(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTSche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante c interpretieren kann als Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite*; die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_t(x, t) = a\omega \cdot \cos \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

$$f_{tt}(x, t) = -a\omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = -\omega^2 f(x, t)$$

$$f_x(x, t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

$$f_{xx}(x, t) = -a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x, t),$$

also ist

$$f_{tt}(x, t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x, t).$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad \text{oder} \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{cL}.$$

Wie diese Rechnung zeigt, wächst zumindest für die hier betrachteten einfachen Schwingungen die Frequenz in der Tat linear mit k , die Frequenzen der Obertöne sind also ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

c) Orthogonalitätsrelationen

Wie eingangs erwähnt, wollen wir in diesem Paragraphen (fast) beliebige periodische Funktionen durch Linearkombinationen von reinen Schwingungen beschreiben; bevor wir damit beginnen, müssen wir uns zunächst überlegen, welche Funktionen genau wir betrachten wollen.

Wir dürfen uns auf keinen Fall nur auf stetige Funktionen beschränken; Rechteckimpulse beispielsweise spielen eine sehr wichtige Rolle in der Informationstechnik. Andererseits wollen wir aber nicht soweit gehen, auch Funktionen wie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für rationale } t \\ \cos t & \text{für irrationale } t \end{cases}$$

zu betrachten, wir müssen also einen Kompromiss finden.

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f keine Häufungspunkte hat und wenn für jede Unstetigkeitsstelle t die links- und rechtsseitigen Grenzwerte

$$f(t^-) = \lim_{s \rightarrow t} f(s) \quad \text{und} \quad f(t^+) = \lim_{s \rightarrow t} f(s)$$

existieren. (Wir verlangen nicht, daß $f(t^+) = f(t^-)$ ist; dies gilt nur dann, wenn f an der Stelle t stetig ist.)

Damit sind also Rechteckimpulse und allgemeiner alle Funktionen, die bis auf isolierte Sprungstellen stetig sind, stückweise stetig.

Auch periodische Funktionen sollten wir vorsichtshalber zumindest einmal formal definieren:

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* zur Periode T , wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t).$$

Ist f periodisch zur Periode T , so offensichtlich auch zur Periode $2T$ oder $-5T$ usw.; falls es einen kleinsten positiven Wert T gibt, zu dem f periodisch ist, bezeichnen wir diesen als *die* Periode von f . In diesem Sinne haben also $\sin t$ und $\cos t$ die Periode 2π , wohingegen konstante Funktionen für jedes $T \in \mathbb{R}$ periodisch zur Periode T sind, so daß wir hier nicht von *der* Periode reden können.

Eine periodische Funktion ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte in irgendeinem abgeschlossenen Intervall J der Länge T , denn für jedes

$t \in \mathbb{R}$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß $t - kT \in J$, und wegen der Periodizität muß $f(t) = f(t - kT)$ sein. Ein solches Intervall der Länge T bezeichnen wir kurz als ein *Periodenintervall*.

Da jede unendliche Menge in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ einen Häufungspunkt hat, kann eine stückweise stetige Funktion in jedem solchen Intervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben; insbesondere gibt es also bei einer stückweise stetigen periodischen Funktion in jedem Periodenintervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, und durch diese sind *alle* Unstetigkeiten der Funktion festgelegt.

Wir betrachten im folgenden für jede reelle Zahl $T > 0$ die beiden Mengen

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right\}$$

und

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right\}.$$

Da Linearkombinationen periodischer Funktionen zur selben Periode T wieder periodisch mit T sind und die Nullfunktion periodisch ist zu jeder Periode, ist $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein \mathbb{R} -Vektorraum und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Da auch das Produkt zweier stückweise stetiger Funktionen stückweise stetig ist, existiert für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das Integral

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt,$$

und das so definierte Produkt hat *fast* alle Eigenschaften eines Skalarprodukts: Symmetrie und Bilinearität sind klar, und da Quadrate in \mathbb{R} stets nichtnegativ sind, ist auch für alle $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(f, f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \geq 0.$$

Leider kann aber für eine nur stückweise stetige Funktion $(f, f) = 0$ sein, ohne daß f gleich der Nullfunktion wäre, beispielsweise für

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } t = kT \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ist $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kein EUKLIDISCHER Vektorraum; das gerade eingeführte Produkt wird uns aber trotzdem im folgenden sehr nützlich sein.

Entsprechend definieren wir auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein Produkt durch

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt;$$

es hat alle Eigenschaften eines HERMITESCHEN Skalarprodukts *außer* der positiven Definitheit.

Wenn wir wirklich EUKLIDISCHE oder HERMITESCHE Vektorräume wollen, können wir uns auf die Unterräume

$$L_0^+(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \rightarrow t^+} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^-} f(s) \right) \right\}$$

und

$$L_0^-(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \rightarrow t^+} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^-} f(s) \right) \right\}$$

beschränken, für deren Elemente in jeder Sprungstelle t der Funktionswert gleich dem arithmetischen Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert ist; sie bilden offensichtlich einen Untervektorraum, und jedes Element, das von der Nullfunktion verschieden ist, hat auf einem abgeschlossenen Intervall Funktionswerte mit positivem Betrag, so daß sein Skalarprodukt mit sich selbst nicht verschwinden kann.

Für praktische Anwendungen ist es gleichgültig, ob man mit L oder L_0^+ arbeitet will, denn jeder Funktion aus L kann man eine Funktion aus L_0^+ zuordnen, die sich höchstens in den Sprungstellen von dieser unterscheidet; der Unterschied zwischen den beiden Funktionen ist somit nicht meßbar.

Fundamental für das weitere ist die folgende Orthogonalitätseigenschaft:

Lemma: Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist

$$(e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1 & \text{falls } k = \ell \end{cases}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} T \cdot (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) &= \int_0^T e^{ik\omega t} \overline{e^{i\ell\omega t}} dt = \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt \\ &= \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t} dt. \end{aligned}$$

Für $k = \ell$ integrieren wir hier die Konstante eins über ein Intervall der Länge T , das Integral ist also T . Für $k \neq \ell$ hat der Integrand die Stammfunktion

$$\frac{e^{i(k-\ell)\omega t}}{i(k-\ell)},$$

die wegen der Beziehung $\omega T = 2\pi$ periodisch ist mit Periode T ; das Integral verschwindet also. Division durch T liefert die Behauptung. ■

Zerlegen wir die komplexe Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil, erhalten wir die etwas umständlicheren entsprechenden Beziehungen für trigonometrische Funktionen. Da Kosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist, sind negative k und ℓ uninteressant; wir begnügen uns daher mit

Lemma: Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 1 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}, \\ (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} \quad \text{und} \\ &(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0. \end{aligned}$$

Beweis: Wir verwenden das gerade bewiesene Lemma; danach ist mit dem KRONECKER- δ ausgedrückt

$$\begin{aligned}\delta_{k\ell} &= (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = (\cos k\omega t + i \sin k\omega t, \cos \ell\omega t + i \sin \ell\omega t) \\ &= (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) \\ &\quad + i(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - i(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t),\end{aligned}$$

also ist

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k,\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn wir ℓ durch $-\ell$ ersetzen; sie werden dann zu

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k,-\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Addiert bzw. subtrahiert man jeweils zwei der sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Gleichungen, folgt, daß für $k, \ell \geq 0$

$$2(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k,-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 2 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist und

$$2(\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k,-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

außerdem ist

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) = (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Ein Leser, der noch nicht davon überzeugt ist, daß komplexe Zahlen und Funktionen auch im Reellen nützlich sind, sollte versuchen, dies rein

reell zu beweisen: er muß also zeigen, daß

$$\int_0^T \cos k\omega t \cos \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ T & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und

$$\int_0^T \sin k\omega t \sin \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist, sowie

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin \ell\omega t dt = 0.$$

Eine ganze Reihe dieser Integrationen sind trivial, und *alle* sind rein reell durchführbar. Dennoch spart der Umweg übers Komplexe viel Zeit.

d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome

Die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ bilden natürlich keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, genauso wenig wie die Funktionen $\cos k\omega t$ und $\sin \ell\omega t$ eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden: Basisdarstellungen sind schließlich stets *endliche* Linearkombinationen, und eine endliche Linearkombination von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen ist insbesondere stetig.

Trotzdem ist es ganz nützlich, zur Demonstration der weiteren Vorgehensweise zunächst die Untervektorräume zu betrachten, die von diesen Funktionen erzeugt werden:

Definition: a) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{C})$ aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{R})$ aller reeller trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $\cos k\omega t$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und den Funktionen $\sin \ell\omega t$ mit $\ell \in \mathbb{N}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Die gerade bewiesenen Orthogonalitätsrelationen können wir dann auch so formulieren, daß die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{C})$ bilden, während die Funktionen $1, \sqrt{2} \cos k\omega t$ und $\sqrt{2} \sin k\omega t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{R})$ bilden.

Zumindest für Funktionen aus $P_T(\mathbb{C})$ und $P_T(\mathbb{R})$ ist damit klar, wie man sie in reine Schwingungen zerlegen kann: Ist allgemein V ein EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum und \mathcal{B} eine Orthonormalbasis von V , so läßt sich ein beliebiger Vektor $\vec{v} \in V$ gemäß

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \langle \vec{v}, \vec{b} \rangle \vec{b}$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken.

Für $f \in P_T(\mathbb{C})$ ist somit

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = (f(t), e^{ki\omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ki\omega t} dt,$$

und für $f \in P_T(\mathbb{R})$ ist

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$c_0 = (f(t), 1) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \cos k\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_\ell = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \sin \ell\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt.$$

Die Summen in diesen Formeln sind natürlich nur formal unendlich; da ein trigonometrisches Polynom nach Definition *endliche* Linearkombination der Basisfunktionen ist, können in jeder dieser Summen höchstens endlich viele Summanden von Null verschieden sein.

Da die Formeln für reelle trigonometrische Polynome deutlich unangenehmer sind als die für komplexe, lohnt es sich oft, auch für reelle Funktionen den Umweg über das Komplexe zu gehen. Das ist immer möglich, denn auf Grund der EULERSCHEN Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes:

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \sin \ell\omega t &= a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \frac{e^{ki\omega t} + e^{-ki\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \frac{e^{\ell i\omega t} e^{-\ell i\omega t}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k e^{ki\omega t} + a_k e^{-ki\omega t}}{2} - i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell e^{\ell i\omega t}}{2} + i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell e^{-\ell i\omega t}}{2} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ki\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ki\omega t}. \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom $\sum c_k e^{k \cdot i\omega t}$, ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}.$$

Insbesondere sind c_k und c_{-k} für alle k komplex konjugiert zueinander; c_0 ist reell und somit zu sich selbst konjugiert. Aus obigen Formeln folgt auch, daß umgekehrt

$$a_k = 2 \Re c_k \quad \text{und} \quad b_\ell = -2 \Im c_\ell$$

ist; man kann also leicht zwischen reeller und komplexer Darstellung umrechnen.

Damit ist auch klar, daß $P_T(\mathbb{R}) = P_T(\mathbb{C}) \cap L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist; die reellen trigonometrischen Polynome sind also genau jene komplexe trigonometrische Polynome, die nur reelle Werte annehmen

Gefühlsmäßig würde man trigonometrische Polynome wohl nicht so definieren wie in diesem Abschnitt, sondern als Polynome in $\sin \omega t$

und $\cos \omega t$. Als kleine Anwendung obiger Überlegung folgt, daß dies in der Tat trigonometrische Polynome im Sinne der hiesigen Definition sind, denn wegen der EULERSchen Formel ist klar, daß es komplexe trigonometrische Polynome sind, und natürlich nehmen sie nur reelle Werte an.

e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen

Die Bedingung, daß $f(t)$ als Summe endlich vieler reiner Schwingungen gegeben sein soll, schränkt die Brauchbarkeit obiger Resultate leider erheblich ein: Ein periodischer Rechteckimpuls etwa läßt sich so nicht behandeln.

Wir können aber jedes beliebige Element von $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $\langle f, e^{ik\omega t} \rangle$ berechnen und hoffen, daß sie für eine harmonische Analyse von f nützlich sind; wir definieren

Definition: Die FOURIER-Transformierte einer Funktion $f \in L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

ist die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto \langle f, e^{k i \omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k i \omega t} dt. \end{cases}$$

(Man beachte, daß diese FOURIER-Transformierte einer *periodischen* Funktion nur auf \mathbb{Z} definiert ist: Periodische Funktionen haben kein kontinuierliches Frequenzspektrum, sondern nur Oberschwingungen zu ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz).

Als *komplexe FOURIER-Reihe* von f bezeichnen wir die zunächst nur formale unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-k i \omega t},$$

als *reelle FOURIER-Reihe* von $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ entsprechend

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit c_0, a_k und b_ℓ wie im vorigen Abschnitt.



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomitee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn dieser zum Präfekten von Isère; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Natürlich ist im Augenblick weder klar, ob diese Summen überhaupt existieren, d.h. also, ob die angegebenen Reihen für alle (oder zumindest fast alle) $t \in \mathbb{R}$ konvergieren, noch ist klar, ob sie dort, wo sie konvergieren, gegen den Funktionswert $f(t)$ konvergieren.

§3: Erste Beispiele von Fourier-Reihen

Bevor wir uns solchen allgemeinen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

a) Rechenregeln

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie wir bei der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können.

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktionen. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnutzen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T

ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T , so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t) dt = \int_\tau^{\tau+T} g(t) dt.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit } 0 \leq \tau_0 < T \quad \text{und } k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t) dt;$$

es reicht also, den Fall $0 \leq \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\begin{aligned} \int_\tau^{\tau+T} g(t) dt &= \int_\tau^T g(t) dt + \int_T^{\tau+T} g(t) dt = \int_\tau^T g(t) dt + \int_0^\tau g(t) dt \\ &= \int_0^\tau g(t) dt + \int_\tau^T g(t) dt = \int_0^\tau g(t) dt. \end{aligned}$$

■

Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t) \cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t) \sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t) \cdot \sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt = 0$$

für alle ℓ . Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 2 \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:

b) Periodische Rechteckimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{mit } f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R};$$

offensichtlich ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell \omega t \, dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} h \sin \ell \omega t \, dt - \int_{T/2}^T h \sin \ell \omega t \, dt \right),$$

aber wir können uns die Auswertung des zweiten Integrals sparen, wenn wir uns daran erinnern, daß für eine ungerade Funktion b_ℓ auch berechnet werden kann als $\frac{4}{T}$ mal dem Integral von Null bis zur halben Periode. Somit ist

$$b_\ell = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} h \sin \ell \omega t \, dt = \frac{4h}{T} \left(-\frac{\cos \ell \omega \frac{T}{2} - 1}{\ell \omega} \right) = \frac{4h}{T} \left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1}{\ell \omega} \right),$$

denn wegen $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell \pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{4h}{T} \cdot \frac{2}{\ell \omega} = \frac{4h}{\pi \ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0, T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0, T)$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$, was bei der Berechnung der Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega \frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen Null, d.h. den Mittelwert der beiden Funktionswerte.)

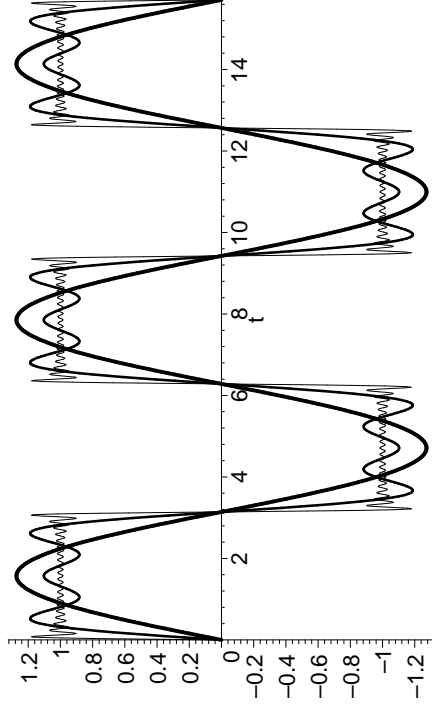


Abb. 6: FOURIER-Polynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung sechs zeigt die Teilsommen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik.

Keine solche Störung sind allerdings die Überschwüngen an den Unstetigkeitsstellen von f : Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwingungen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird.

Das tatsächliche Signal hat somit eher die Gestalt einer der Kurven aus Abbildung sechs als die eines (physikalisch nicht zu realisierenden) „echten“ Rechteckimpulses.

Die in der Abbildung zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich aber problemlos mit einem geeignet eingestellten Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden.

Zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß von dieser Strahlungen nichts aus dem Gehäuse dringt. Bei einem Standardgehäuse hat man hier nicht die geringste Chance; Computer im Hochsicherheitsbereich brauchen ihre eigenen Spezialgehäuse.

c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz \mathbb{R} .

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t),$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und erhalten den

Koeffizienten von $\sin \ell \omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell \omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{T}{4} - t \right) \sin \ell \omega t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4} \int_0^T \sin \ell \omega t \, dt - \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t) \cdot v(t) \, dt = u(t) \cdot v(t) - \int u'(t) \cdot v(t) \, dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $v(t) = \sin \ell \omega t$ mit $v' = -\frac{1}{\ell \omega} \cos \ell \omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t \sin \ell \omega t \, dt &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell \omega} \int \cos \ell \omega t \, dt \\ &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell^2 \omega^2} \sin \ell \omega t + C. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T} \left(\frac{-T \cdot \cos \ell \omega T + 0 \cdot \cos 0}{\ell \omega} + \frac{\sin \ell \omega T - \sin 0}{\ell^2 \omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\ell \omega} \cos(\ell \cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell \omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$,

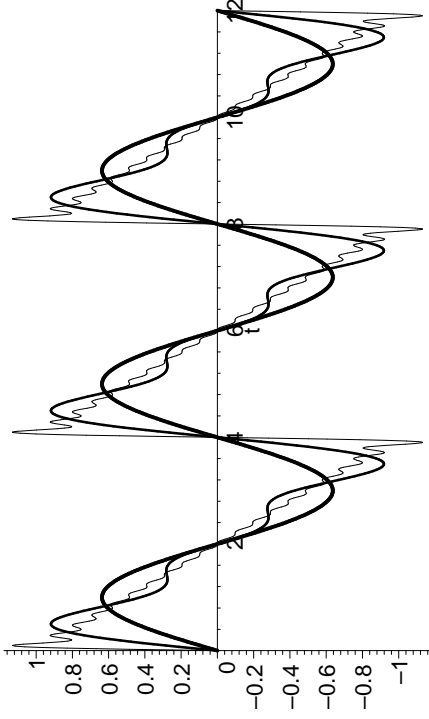


Abb. 7: FOURIERpolynome für die Sägezahnswingung

denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

Abbildung 7 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwüngen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

d) Der Sinus hyperbolicus

Als letztes Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$$f(t) = \sinh t \quad \text{für } -\pi < t \leq \pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi.$$

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot i\omega t} dt.$$

Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern,

daß

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh t e^{-k \cdot i\omega t} dt$$

? ? ?
? ? ?

sei, denn $f(t)$ stimmt *nur* im Intervall $(-\pi, \pi]$ mit $\sinh t$ überein; für $\pi < t \leq 2\pi$ ist $f(t) = \sinh(t - 2\pi)$. Falls wir die mit Fragezeichen versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$g(t) = \sinh t$ für $0 < t \leq 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π , und das ist, wie die Abbildungen acht und neun zeigen, eine völlig andere Funktion: f ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema $\pm \sinh \pi \approx \pm 11,54873936$ begrenzt ist, g dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und $\sinh 2\pi \approx 267,7448943$, die weder gerade noch ungerade ist.

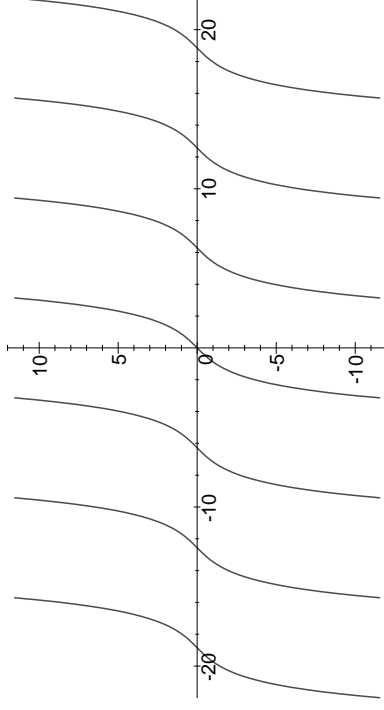


Abb. 8: Die Funktion $f(t)$

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man am besten, wenn man sie wie in Abbildung zehn in einem

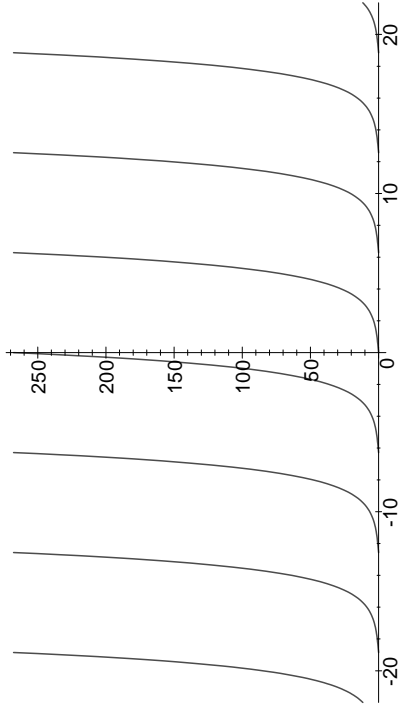


Abb. 9: Die Funktion $g(t)$

gemeinsamen Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo f und g nicht übereinstimmen, ist f durch eine ausgezogene, g durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

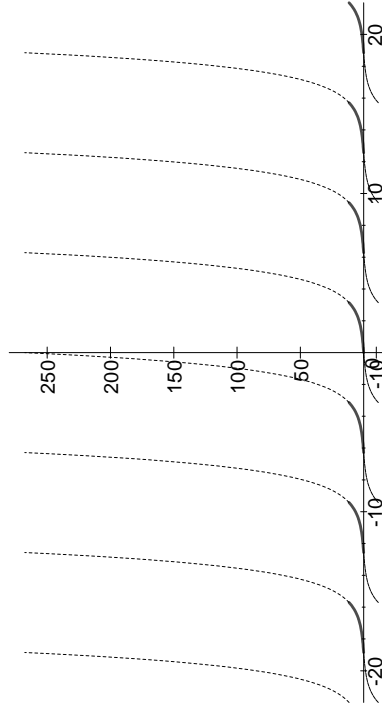


Abb. 10: $f(t)$ und $g(t)$ im gleichen Koordinatensystem

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis 2π arbeiten wollen, müssen

wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \int_0^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t - 2\pi) e^{-k \cdot it} dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §3a), daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurückgeführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2} e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{t(1-ki)} - e^{-t(1+ki)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{t(1-ki)}}{1-ki} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)}}{-(1+ki)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{\pi} e^{-ki\pi} - e^{-\pi} e^{ki\pi}}{1-ki} + \frac{e^{-\pi} e^{-ki\pi} - e^{\pi} e^{ki\pi}}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{4\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left(\frac{1}{1-ki} - \frac{1}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \sinh \pi (1+ki) - (1-ki) \sinh \pi}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k \cdot ik}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} e^{ikt}.$$

Da der Koeffizient von e^{ikt} eine ungerade Funktion von k ist, fallen beim Einsetzen von $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$ die Kosinusterme weg, während

sich die Sinusterme zu k und zu $-k$ gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} i \sin kt = -2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} \sin kt,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von f ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wären die Vorüberlegungen aus §3a) ebenfalls nützlich gewesen: Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{i\ell t} - e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{4i}{4i} \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{t(1-i\ell)}}{4i} - \frac{4i}{4i} \frac{e^{-t(1-i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i},$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1 \pm i\ell)}}{4i} \text{ ist } \frac{e^{\pm t(1 \pm i\ell)}}{\pm 4i(1 \pm i\ell)}.$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$\begin{aligned} & \frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{-4i(1-i\ell)} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{-4i(1+i\ell)} \\ &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h. } b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4\pi i(1-i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(e^{\pi(1+i\ell)} - e^{-\pi(1+i\ell)}) - (e^{-\pi(1+i\ell)} - e^{\pi(1+i\ell)})}{4\pi i(1+i\ell)} \\ &\quad - \frac{(e^{\pi(1-i\ell)} - e^{-\pi(1-i\ell)}) - (e^{-\pi(1-i\ell)} - e^{\pi(1-i\ell)})}{4\pi i(1-i\ell)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1+i\ell)} - \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1-i\ell)} \\ &= (-1)^\ell \left(\frac{\sinh \pi}{\pi i(1+i\ell)} - \frac{\sinh \pi}{\pi i(1-i\ell)} \right) \\ &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \left(\frac{1}{1+i\ell} - \frac{1}{1-i\ell} \right) \\ &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \frac{\pi(1-i\ell) - \pi(1+i\ell)}{1+\ell^2} = (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{-2\ell}{\ell^2 + 1}. \end{aligned}$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt = \frac{1}{\pi} \cosh t \sin \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t dt \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left(\sinh t \cos \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt \right) \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left((-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi + \ell \pi b_\ell \right) = -\frac{\ell}{\pi} (-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi - \ell^2 b_\ell. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(1 + \ell^2) b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} (-1)^\ell \ell \quad \text{und} \quad b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^\ell \ell}{\ell^2 + 1}.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von f auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Kosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

e) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnswingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

Für t aus dem offenen Intervall $(0, T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ sind Stammfunktionen der Funktionen $\cos \ell \omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega t.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0, T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^t \left(\frac{-1}{2} \right) d\tau,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^t \cos \ell \omega \tau d\tau = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \omega T/2}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \pi}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der N -ten Teilsumme und $f(t)$ als Integral:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) &= \int_{T/2}^t \left(\sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau - \left(\frac{-1}{2} \right) \right) d\tau \\ &= \int_{T/2}^t \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau \right) d\tau. \end{aligned}$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Kosinus ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{\ell \cdot i \omega \tau} + e^{-\ell \cdot i \omega \tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^N e^{\ell \cdot i \omega \tau} \\ &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i \omega \tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i \omega \tau} \end{aligned}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1 - q) \sum_{j=0}^r q^j = \sum_{j=0}^r q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für $q \neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^r q^j = \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q}.$$

In unserem Fall ist $q = e^{i \omega \tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i \omega \tau} = \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i \omega \tau} \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-N \cdot i \omega \tau} - e^{(N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}}. \end{aligned}$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2}) \cdot i \omega \tau} - e^{(N+\frac{1}{2}) \cdot i \omega \tau}}{e^{-\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau} - e^{\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau}} = \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}}.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N \rightarrow \infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \quad \text{und} \quad \dot{v}(\tau) = \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega};$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega t}{\left(2N + 1 \right) \omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \int_{\pi/2}^t \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \frac{T}{2} = \cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \pi = 0.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeineren Form an:

Für eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion v und eine in $[a, b]$ integrierbare Funktion w gibt es einen Wert $\zeta \in [a, b]$, so daß gilt

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau) d\tau = v(\zeta) \int_a^b w(\tau) d\tau.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der Beweis kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a, b]$ sowohl seinen Maximalwert v_{\max} als auch seinen Minimalwert v_{\min} an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau) d\tau,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau) d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau) d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a, b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right);$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/2}^t \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left(2N + 1 \right) \omega} \int_{\pi/2}^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left(2N + 1 \right) \omega} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

denn $\sin \frac{\omega T}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \\ &= -\frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega t}{\left(2N + 1 \right) \omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left(2N + 1 \right) \omega} \left(\frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für $0 < t < T$ ist $1 / \sin \frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}},$$

und da der Kosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T , gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T - \varepsilon]$ ist $\sin \frac{\omega t}{2} \geq \sin \frac{\omega \varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega \varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4}.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0, T)$ und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{3T}{4} + \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}, \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T . Somit beschreibt $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega \left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell \omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\ell \omega T}{2} - \ell \omega t\right)}{\ell \omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell \pi - \ell \omega t)}{\ell \omega}. \end{aligned}$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin(x - \pi) = \sin x,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index

verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = 2 \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell-1)\omega \frac{T}{4} = \sin(2\ell-1) \frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

f) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen sechs und sieben zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwüngen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega \tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega \tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell-1)\omega \tau \, d\tau,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell-1)\omega \tau &= \sum_{\ell=1}^N (e^{(2\ell-1)i\omega \tau} + e^{-(2\ell-1)i\omega \tau}) \\ &= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N-1} e^{(2\ell-1)i\omega \tau} = e^{(-2N+1)i\omega \tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell i\omega \tau}. \end{aligned}$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega \tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1 - e^{4N i\omega \tau}}{1 - e^{2i\omega \tau}}.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$e^{-2N \cdot i\omega\tau} \frac{1 - e^{4N \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}} = \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} (1 - e^{4N \cdot i\omega\tau})}{e^{-i\omega\tau} (1 - e^{2i\omega\tau})} = \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} - e^{4N \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}}$$

$$= \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} - e^{2N \cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau.$$

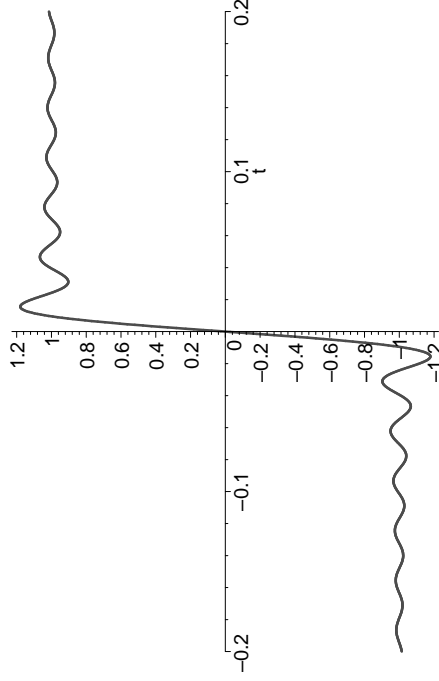


Abb. 11: Das GIBBSphänomen in Großaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwüfung. Abbildung 11 zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}.$$

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwüfung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau = \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{2N \sin \frac{u}{2N}} du.$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N \rightarrow \infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{2N \cdot \frac{u}{2N}} du = \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du.$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

Definition: Die Funktion

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis*.

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente t , denn die Nullstelle des Integranden bei $u = 0$ ist harmlos, da

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

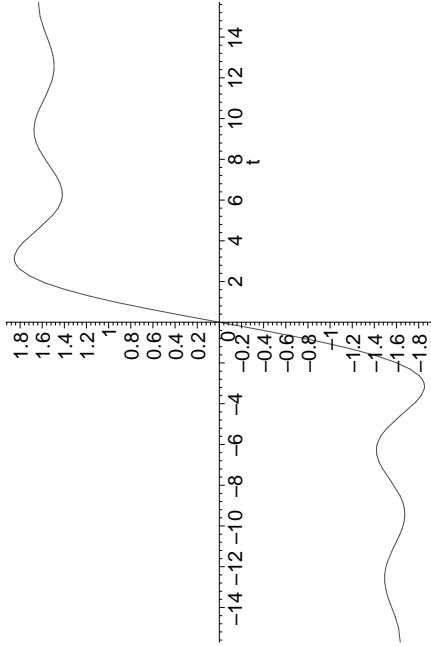


Abb. 12: Der Integralsinus

ist. Wie Abbildung zwölf zeigt, konvergiert er für $t \rightarrow \pm\infty$ relativ schnell gegen einen konstanten Wert; wie wir in §1m mit Hilfe des Residuensatzes gesehen haben ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi.$$

Wegen des geraden Integranden ist das Integral von Null bis unendlich die Hälfte davon, also $\pi/2$.

Der uns interessierende Wert des Integralsinus an der Stelle π läßt sich nicht in einfacher Weise durch bekannte Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\text{Si}(\pi) \approx 1,8519305198 \quad \text{und} \quad \frac{2h}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1,1789797445 \cdot h.$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für $N \rightarrow \infty$ den Funktionswert noch um knapp 18%.

Ersetzen wir die Funktion f durch $f+c$ für irgendeine Konstante c , ändert sich nur der konstante Term der FOURIER-Reihe; das GIBBS-Phänomen bleibt auch in seiner Größe unverändert. Verändert wird dagegen der

Funktionswert; es ist daher besser, die Überschwingung auf die unverändert gebliebene Sprunghöhe zu beziehen. Wir sollten daher besser sagen, daß die Überschwingung knapp neun Prozent der Sprunghöhe ausmacht.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwingung explizit berechnen: Aus Abschnitt e) wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand; für ihre erste positive Nullstelle t_N ist

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega t_N = \pi, \quad \text{d.h.} \quad t_N = \frac{\pi}{\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega} = \frac{T}{2N + 1}.$$

Mit der Substitution $u = \left(N + \frac{1}{2}\right) \omega \tau$ wird

$$\int_{T/2}^{t_N} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau = \int_{(N + \frac{1}{2}) \pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N + 1) \omega \sin \frac{u}{2N + 1}} du.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große N durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N + \frac{1}{2}) \pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u} du &= \frac{1}{\omega} \left(\text{Si}(\pi) - \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) \right) = \frac{\text{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}}{\omega} \\ &= \frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) - \frac{T}{4}. \end{aligned}$$

Dabei ist $T/4$ der Wert, der überschungen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für $N \rightarrow \infty$ gegen $\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi)$. Dividiert man dies durch $\frac{T}{4}$, ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) \cdot \frac{4}{T} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi),$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwingung um knapp 18% des Funktionswerts oder knapp neun Prozent der Sprunghöhe.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um knapp neun Prozent überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele spätere, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten zur elektromagnetischen Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

g) Die Besselsche Ungleichung

In einem EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Vektorraum V mit (HERMITESCHEM) Skalarprodukt (\cdot, \cdot) gilt für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} , daß für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \mu_{\vec{b}} \vec{b}$$

das Skalarprodukt berechnet werden kann als

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \overline{\mu_{\vec{b}}},$$

wobei wegen der Basiseigenschaft von \mathcal{B} natürlich wieder alle Summen endlich sind, auch wenn die Basis \mathcal{B} unendlich sein sollte. Insbesondere ist

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \overline{\lambda_{\vec{b}}} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} |\lambda_{\vec{b}}|^2.$$

Für trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i \omega t} \in P_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

ist daher $(f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$, wobei auch hier wieder, da es sich um ein trigonometrisches *Polynom* handelt, in beiden unendlichen Summen nur endlich viele Summanden ungleich null sind.

$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist zwar kein EUKLIDISCHER Vektorraum und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ kein HERMITESCHER, aber wir hoffen doch, daß sich die trigonometrischen Funktionen bzw. komplexen Exponentialfunktionen wenigstens so ähnlich verhalten wie eine Orthonormalbasis; vielleicht sollte auch gelten, daß für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i \omega t} \quad \text{gilt} \quad (f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

obwohl *hier* wirklich unendliche Summen stehen können.

Bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen wird diese Frage eine wesentliche Rolle spielen; als ersten Einstieg dazu beweisen wir die BESSELSCHE Ungleichung:

Lemma: Für die FOURIER-Koeffizienten $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt$ einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITESCHE Produkt (f, f) , und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als Produkte

$$c_k = (f, e^{k \cdot i \omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2a), daß

$$(S_N, S_N) = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, f) - (f, S_N) + (S_N, S_N).$$

Auch wenn das HERMITESCHE Produkt auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITESCHEN Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned} (S_N, f) &= \left(\sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}, f \right) = \sum_{k=-N}^N c_k \left(e^{k \cdot i \omega t}, f \right) \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k \overline{(f, e^{k \cdot i \omega t})} = \sum_{k=-N}^N c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\ &= (S_N, S_N), \end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f, S_N) = \overline{(S_N, f)} = (S_N, f) = (S_N, S_N).$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \leq (f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, S_N)$$

und damit

$$(S_N, S_N) \leq (f, f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

wie behauptet. ■



FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYSCHEN Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, die wir in Abschnitt d) für trigonometrische Polynome hergeleitet haben) folgt, daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell}^2.$$

h) Harmonische Analyse als lineare Abbildung

Die BESSELSche Ungleichung zeigt, daß nicht alle Folgen reeller oder komplexer Zahlen als FOURIER-Koeffizienten eine stückweise stetigen Funktion auftreten können: Zumindest muß die Summe ihrer Betragsquadrate konvergieren, d.h. die $c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $c(k) = c_k$, die jedem $k \in \mathbb{Z}$ den FOURIER-Koeffizienten c_k zuordnet, liegt im Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Um den Zusammenhang zwischen Funktionen und Koeffizientenfolgen besser zu verstehen, definieren wir für $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt \end{cases};$$

$\hat{f}(k)$ ist also gerade der k -te FOURIER-Koeffizient von f .

Lemma: Die Zuordnung $f \mapsto \hat{f}$ definiert eine lineare Abbildung von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Der *Beweis* ist trivial wegen der Linearität der Integration. ■

Als nächstes definieren wir auf $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ein HERMITESches Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}.$$

Wir müssen zeigen, daß dies erstens wohldefiniert ist, daß die Summe also überhaupt konvergiert, und daß es zweitens alle Forderungen an ein HERMITESches Skalarprodukt erfüllt.

Da für zwei komplexe Zahlen z und w ist $(|z| - |w|)^2 \geq 0$, also

$$|zw| = |z\overline{w}| \leq \frac{1}{2} (|z|^2 + |w|^2).$$

Für zwei Funktionen $c, d \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ist daher für jede natürliche Zahl N

$$\left| \sum_{k=-N}^N c(k) \overline{d(k)} \right| \leq \sum_{k=-N}^N |c(k) \overline{d(k)}| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-N}^N |c(k)|^2 + \sum_{k=-N}^N |d(k)|^2 \right).$$

Nach Definition von $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ konvergiert die rechte Seite für $N \rightarrow \infty$, also auch die linke.

Das Nachrechnen der Forderungen an ein HERMITESches Skalarprodukt ist nun einfach: Abgesehen von der Tatsache, daß die Summen nicht mehr endlich sind, geht alles ganz genauso wie beim HERMITESchen Standardskalarprodukt auf \mathbb{C}^n .

Mit diesem Skalarprodukt ausgedrückt bekommt die BESSELSche Ungleichung die kompakte Form

$$(\hat{f}, \hat{f}) \leq (f, f) \quad \text{für alle } f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

§4: Periodische Faltungen

Abgesehen von den beiden Beispielen der Rechteckschwingung und des Sägezahns wissen wir bislang noch von keiner FOURIER-Reihe, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert. In diesem Paragraphen soll dies zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen geklärt werden. Als zentral wird sich dabei eine neue Konstruktion herausstellen, die *Faltung zweier Funktionen*.

a) Faltungen

Definition: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Funktion

$$f \star g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

als (periodische) Faltung von f und g .

Anschaulich kann man sich die Faltung als eine Art Mittelung von f vorstellen mit einer Gewichtsfunktion g . Im zweidimensionalen (nicht-periodischen) Analogon kann man beispielsweise ein optisch defokussiertes Bild so beschreiben: Bei einer perfekten optischen Abbildung einer Ebene hängt jeder Bildpunkt von genau einem Punkt der Ebenen ab; ist das System aber defokussiert, so kommen auch noch Einflüsse der Nachbarpunkte dazu, die umso größer sind, je näher die Punkte beieinanderliegen. Eine Helligkeitsverteilung $f(s, t)$ wird dann abgebildet auf

$$F(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(s-\sigma)^2+(t-\tau)^2/2a} f(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

wobei der Parameter a umso größer ist, je stärker das Bild defokussiert ist. Für kleines a ist der Effekt also eher ein Weichzeichnen als eine echte Unschärfe, und dieser Glättungseffekt ist ein allgemeines Charakteristikum von Faltungen:

Lemma: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g$ eine stetige Funktion.

(Man beachte, daß f und g beide nur als stückweise stetig vorausgesetzt sind!)

Beweis: Als stückweise stetige periodische Funktion ist g insbesondere beschränkt: Für jedes offene Intervall (t_j, t_{j+1}) , in dem f stetig ist, müssen nach Definition der stückweisen Stetigkeit der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow t_j^+} g(t)$ und der linksseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow t_{j+1}^-} g(t)$ existieren; damit kann die Einschränkung von g auf das offene Intervall (t_j, t_{j+1}) fortgesetzt werden zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ (die an den Intervallenden natürlich nicht mit g übereinstimmen muß). Damit hat der Betrag dieser Funktion ein endliches Maximum M_j , das auch eine Schranke für g im offenen Intervall (t_j, t_{j+1}) ist. Nimmt man nun als M das Maximum aller M_j sowie auch der Beträge $|g(t_j)|$ der Funktionswerte an den potentiellen Sprungstellen, so ist $|g(t)| \leq M$ für alle $t \in [0, T]$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien nun t_1 und t_2 Punkte aus \mathbb{R} ; dann ist

$$\begin{aligned} |f \star g(t_1) - f \star g(t_2)| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| |g(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{M}{T} \int_0^T |f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Das noch verbliebene Integral mißt die Fläche zwischen den Graphen von $f(t)$ und $f(t+t_2-t_1)$ über eine Periode von f ; wegen der stückweisen Stetigkeit von f geht diese gegen null für $t_2 \rightarrow t_1$. ■

b) Die Fourier-Reihe einer Faltung

Die Nützlichkeit von Faltungen für FOURIER-Reihen ergibt sich aus folgender Formel:

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$; die komplexen FOURIER-Koeffizienten von $f \star g$ sind also gerade die Produkte der komplexen FOURIER-Koeffizienten von f und von g .

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen: Der k -te FOURIER-Koeffizient c_k von $f \star g$ ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f \star g(t) e^{-k \cdot i\omega t} dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right) e^{-k \cdot i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq \tau \leq T}} f(t - \tau) g(\tau) e^{-k \cdot i\omega t} d\tau dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq \tau \leq T}} f(t - \tau) e^{-k \cdot i\omega(t - \tau)} \cdot g(\tau) e^{-k \cdot i\omega\tau} dt d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) e^{-k \cdot i\omega(t - \tau)} dt \right) g(\tau) e^{-k \cdot i\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer kann mit Hilfe der Substitution $u = t - \tau$ im Integral berechnet werden:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) e^{-k \cdot i\omega(t - \tau)} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T - \tau} f(u) e^{-k \cdot i\omega u} du = \widehat{f}(k),$$

denn wie wir uns schon überlegt haben, kommt es bei einer periodischen Funktion nicht darauf an, über welches Intervall der Länge T wir integrieren. Somit ist

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \widehat{f}(k) \cdot g(\tau) e^{-k \cdot i\omega\tau} d\tau = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k),$$

wie behauptet. ■

Sind $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i\omega t}$ und $S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k \cdot i\omega t}$ die FOURIER-Reihen von f und g , ist die FOURIER-Reihe von $f \star g$ somit

$$S_{f \star g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{k \cdot i\omega t}.$$

Nach der BESSELschen Ungleichung konvergieren die Summen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2;$$

außerdem ist für jedes k

$$|c_k d_k| \leq \frac{1}{2} (|c_k|^2 + |d_k|^2);$$

also konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k e^{k \cdot i\omega t}|.$$

(Man beachte, daß $|e^{k \cdot i\omega t}| = 1$ ist für jede reelle Zahl t .) Damit haben wir gezeigt, daß die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Das hat eine wichtige Konsequenz:

Lemma: Konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion h gleichmäßig gegen eine Funktion S_h , so ist S_h stetig und hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie h .

Beweis: Die FOURIER-Reihe von h sei

$$S_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i\omega t}.$$

Da alle Summanden $c_k e^{k \cdot i\omega t}$ stetige Funktionen sind, ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auch die Summe eine stetige Funktion; deren k -ter FOURIER-Koeffizient ist

$$\widehat{S_h}(k) = (S_h, e^{k \cdot i\omega t}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=-N}^N c_\ell (e^{\ell \cdot i\omega t}, e^{k \cdot i\omega t}) = c_k,$$

wie behauptet. ■

Insgesamt haben wir damit bewiesen

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Diese hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie $f \star g$. ■

Damit wissen wir zwar immer noch nicht, *wohin* die FOURIER-Reihe von $f \star g$ konvergiert, aber wir wissen immerhin, *daß* sie für Funktionen, die als Faltungen darstellbar sind, konvergiert, und wir wissen auch, daß für die Differenz zwischen Ausgangs- und Grenzfunktion sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden. Wir müssen daher einerseits Funktionen mit verschwindenden FOURIER-Koeffizienten genauer untersuchen und andererseits versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen als Faltungen darzustellen, auf die wir den gerade bewiesenen Satz anwenden können.

c) Faltung mit einem Sägezahn

Als erstes konkretes Beispiel (von dem sich zeigen wird, daß es zumindest einen Teil der zweiten Aufgabe lösen wird) betrachten wir für eine beliebige Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Faltung mit dem Sägezahn

$$s(t) = \frac{T}{2} - t \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad s(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T ; es handelt sich hier um das Zweifache der in §2c) betrachteten Funktion.

Für $t, \tau \in [0, T)$ liegt $t - \tau$ genau dann wieder in $[0, T)$, wenn $\tau \leq t$ ist; andernfalls liegt $t - \tau$ im Intervall $(-T, 0)$, wo

$$s(t) = s(t+T) = \frac{T}{2} - (t+T) = -\frac{T}{2} - t$$

ist. Somit ist für $t, \tau \in (0, T)$

$$s(t - \tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau = t \\ -\frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

und $s * f(t)$ ist gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T s(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^t \left(\frac{T}{2} - (t - \tau) \right) f(\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_t^T \left(-\frac{T}{2} - (t - \tau) \right) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{T}{2} \int_t^T f(\tau) d\tau + \int_0^t (\tau - t) f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau - \int_t^T f(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{T} \int_0^t (\tau - t) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, so ist der erste Summand gleich

$$\frac{1}{2} (F(t) - F(0) - F(T) + F(t)) = F(t) - \frac{F(0) + F(T)}{2}.$$

Auch das letzte Integral läßt sich durch partielle Integration weiter ausrechnen zu

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tau - t) f(\tau) d\tau &= (\tau - t) F(\tau) \Big|_0^T - \int_0^T F(\tau) d\tau \\ &= (T - t) F(T) + t F(0) - \int_0^T F(\tau) d\tau \\ &= t(F(0) - F(T)) + T F(T) - \int_0^T F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$s * f(t) = F(t) + \frac{t}{T} (F(0) - F(T)) - \frac{F(0) + F(T)}{2} + F(T) - \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau) d\tau.$$

Abgesehen von dem Term $\frac{t}{T} (F(0) - F(T))$ ist das eine Stammfunktion von $f(t)$, denn die drei hinteren Terme sind Konstanten, die nicht von t abhängen. Ist also insbesondere $F(T) = F(0)$, so ist $s * f$ eine Stammfunktion von f . Dies wollen wir ausnutzen, um differenzierbare Funktionen sowie eine leichte Verallgemeinerung davon als Faltungen auszudrücken und so die Konvergenz ihrer FOURIER-Reihen zu beweisen.

d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine stückweise stetige Funktion heißt stückweise differenzierbar, wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig differenzierbar ist, und wenn auch in diesen Ausnahmepunkten sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von $f(t)$ existieren.

Hier interessieren wir uns für periodische Funktionen; für diese bedeutet die Definition, daß es pro Periodenintervall höchstens endliche viele Punkte geben darf, in denen die Ableitung nicht definiert ist, aber auch

dort muß sie einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert haben.

Einfache Beispiele stückweise differenzierbarer Funktionen sind die Rechteckschwingungen aus §2b), die überall außer in den Sprungstellen stetig differenzierbar sind und Ableitung null haben; in den Sprungstellen verspricht daher auch sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert. Die Funktion ist aber trotzdem nicht differenzierbar in den Sprungstellen, da sie dort nicht einmal stetig ist. (Wäre f differenzierbar, so würde die Ableitung identisch verschwinden, die Funktion müßte also nach dem üblichen Argument über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung konstant sein.)

Genauso ist beim Sägezahn aus §2c) die Ableitung überall außer in den Sprungstellen gleich -1 ; in den Sprungstellen ist die Funktion nicht differenzierbar, aber beide Grenzwerte der Ableitung sind gleich -1 .

Weiteres Beispiel einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion ist etwa

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad |t| \leq 1,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode zwei. Für alle $t \notin \mathbb{Z}$ ist f differenzierbar; falls die größte ganze Zahl kleiner t gerade ist, ist die Ableitung $+1$, ansonsten -1 . Bei einer geraden ganzen Zahl ist der linksseitige Grenzwert der Ableitung -1 und der rechtsseitige $+1$, bei einer ungeraden ist es umgekehrt.

Für eine stückweise differenzierbare Funktion können wir nicht wirklich von der abgeleiteten Funktion reden, da diese nicht in jedem Punkt existieren muß. Wir können aber eine Funktion $\varphi(t)$ definieren, die überall dort mit $f(t)$ übereinstimmt, wo $f(t)$ existiert; in den übrigen Punkten setzen wir $\varphi(t)$ auf irgendeinen beliebigen Wert, zum Beispiel auf null.

Die Funktion

$$\tilde{f}(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

ist stetig und stückweise differenzierbar, und sie hängt nicht ab vom Wert von φ in den Ausnahmepunkten; ihre Ableitung stimmt dort, wo sie definiert ist, mit φ überein. Falls f stetig ist, unterscheidet sich \tilde{f} daher nur um eine Konstante von f , und auch f ist eine Stammfunktion von φ .

Setzen wir nun noch zusätzlich voraus, daß $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ periodisch ist, folgt aus der Rechnung im vorigen Abschnitt, daß sich $f(t)$ nur um eine Konstante vom Faltungsprodukt $s * \varphi$ unterscheidet, denn

$$f(T) - f(0) = 0$$

für eine Funktion mit Periode T .

Aus Abschnitt $b)$ wissen wir, daß die FOURIER-Reihe von $s * \varphi$ wie auch von jeder anderen Faltung absolut und gleichmäßig konvergiert; da die Addition einer Konstanten hieran nichts ändert folgt also zusammen mit den übrigen Resultaten aus Abschnitt $b)$

Satz: Ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stetig und stückweise differenzierbar, konvergiert die FOURIER-Reihe von f absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f , die dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie f . ■

e) Der Eindeutigkeitsatz

Auch wenn wir nun wissen, daß die FOURIER-Reihe zumindest für stetige stückweise differenzierbare Funktionen konvergiert, wissen wir noch nicht, wohin sie konvergiert. Diese Frage soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall einer Funktion, deren sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden, und die außerdem an allen Sprungstellen noch eine Zusatzvoraussetzung erfüllt:

Satz: Sind für $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alle FOURIER-Koeffizienten null und ist in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ der Funktionswert $f(t)$ das arithmetische Mittel aus dem linksseitigen Grenzwert $f(t^-)$ und dem rechtsseitigen Grenzwert $f(t^+)$, so ist f die Nullfunktion.

Beweis: Auch hier arbeiten wir wieder mit einem Faltungsintegral, und zwar wollen wir versuchen, die Funktion f als Faltung von sich selbst mit einer geeigneten Funktion g auszudrücken; wir suchen also nach einer Funktion g , so daß $f \star g = f$ ist. Falls g diese Eigenschaft für beliebige Funktionen f haben soll, die durch ihre FOURIER-Reihe dargestellt werden, müssen dann alle FOURIER-Koeffizienten von g gleich eins sein, denn bei einer Faltung zweier Funktionen multiplizieren sich die FOURIER-Koeffizienten. g hat also die FOURIER-Reihe

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k \cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

was offensichtlich unmöglich ist: Nach der BESSEL'schen Ungleichung müßte sonst nämlich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1$$

konvergieren, was natürlich nicht der Fall ist.

Wir können aber eine kleine Modifikation dieser Reihe, betrachten, nämlich

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t}.$$

Hier sorgt der Exponent $|k|$ im Falle $|r| < 1$ für eine starke Dämpfung der Koeffizienten mit großem Index, so daß es zumindest mit der BESSEL'schen Ungleichung keine Probleme mehr gibt: Die entsprechende Summe ist zusammengesetzt aus zwei konvergenten geometrischen Reihen. Falls auch $I_r(t)$ selbst konvergiert, können wir damit rechnen und hoffen, daß wir irgendwann einmal den Grenzübergang $r \rightarrow 1$ machen können, was dann *ungefähr* der Faltung mit der nicht existenten Funktion g entspricht.

Wir berechnen $I_r(t)$ über zwei geometrische Reihen:

Beschränken wir uns zunächst auf positive Indizes, so ist nach der Sum-

menformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} &= \frac{1}{1 - r e^{i\omega t}} = \frac{1 - r e^{-i\omega t}}{(1 - r e^{i\omega t})(1 - r e^{-i\omega t})} \\ &= \frac{1 - r \cos \omega t + i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in einem der Summanden k durch $-k$, so ändert sich nichts am Koeffizienten $r^{|k|}$ und auch nichts am Realteil von $e^{k \cdot i\varphi}$; der Imaginärteil allerdings ändert sein Vorzeichen. Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^0 r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} = \frac{1 - r \cos \omega t - i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t}$$

der konjugiert komplexe Wert zu obiger Summe. Der Summand eins für $k = 0$ wurde in beiden Summen berücksichtigt, tritt aber in der Gesamtsumme nur einmal auf; also ist

$$\begin{aligned} I_r(t) &= \frac{1 - r \cos \omega t + i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} + \frac{1 - r \cos \omega t - i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} - 1 \\ &= \frac{2 - 2r \cos \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} - 1 = \frac{2 - 2r \cos \omega t - (1 + r^2 - 2r \cos \omega t)}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Diese Funktion wollen wir uns für verschiedene Werte von r etwas genauer ansehen.

Abbildung 13 zeigt, daß sich I_r im offenen Intervall $(0, T)$ für $r \rightarrow 1$ immer stärker an die t -Achse annähert, wohingegen die Funktionswerte an den Intervallenden immer stärker ansteigen. In der Tat können wir für $0 < t < T$ beim Grenzübergang $r \rightarrow 1$ einfach $r = 1$ setzen und erhalten

$$I_1(t) = \frac{1 - 1^2}{2 - 2 \cos \omega t} = 0.$$

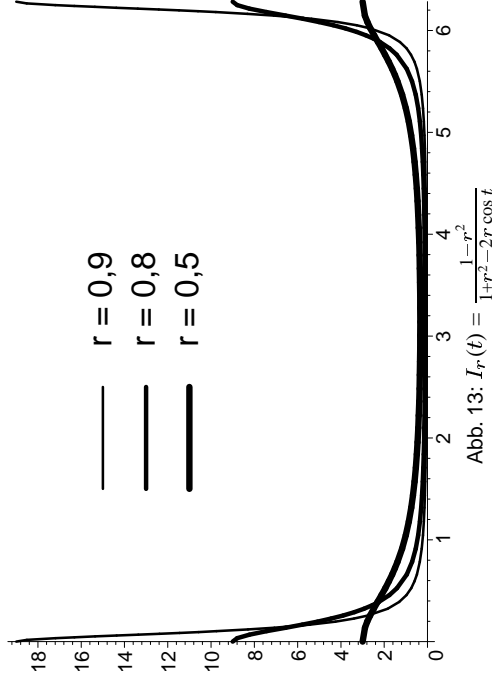


Abb. 13: $I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}$

Für $t = 0$ oder T verschwindet dagegen auch der Nenner, und

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} I_r(0) &= \lim_{r \rightarrow 1} I_r(T) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^2}{1+r^2-2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \infty. \end{aligned}$$

Die Fläche unter der Kurve I_r im Intervall $[0, T]$ ist

$$\int_0^T \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \omega t} dt,$$

ein nicht sehr angenehm aussehendes Integral.

Die Mathematik stellt allerdings seit über hundert Jahren Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich nicht nur entscheiden lässt, ob Funktionen wie I_r eine elementar ausdrückbare Stammfunktion haben, sondern auch berechnen, wie diese Stammfunktion dann aussieht. In den gängigen Computeralgebrasystemen sind diese Algorithmen zumindest teilweise implementiert, und wenn es auch zu weit führen würde, hier zu erklären,

wie man eine Stammfunktion des Integranden

$$I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \omega t}$$

findet, lässt sich doch das Ergebnis

$$F_r(t) = \int I_r(t) dt = -\frac{2}{\omega} \arctan \left(\frac{r+1}{r-1} \tan \frac{\omega t}{2} \right) + C$$

leicht verifizieren: Nach der Kettenregel ist zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arctan \left(a \tan \frac{\omega t}{2} \right) &= \frac{1}{1+a^2 \tan^2 \frac{\omega t}{2}} \cdot \frac{a\omega}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega t}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\omega}{\cos^2 \frac{\omega t}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\omega}{1+(a^2-1) \sin^2 \frac{\omega t}{2}}. \end{aligned}$$

Mit der Beziehung

$$\sin^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1-\cos \omega t}{2}$$

wird das zu

$$\frac{1}{2} \frac{a\omega}{1+\frac{a^2-1}{2} - \frac{a^2-1}{2} \cos \omega t} = \frac{a\omega}{(a^2+1) - (a^2-1) \cos \omega t}.$$

Für $a = \frac{r+1}{r-1}$ ist

$$a^2+1 = 2 \cdot \frac{r^2+1}{(r-1)^2} \quad \text{und} \quad a^2-1 = \frac{4r}{(r-1)^2},$$

also wird der Ausdruck zu

$$\frac{\frac{r+1}{r-1} \cdot \omega}{2 \cdot \frac{r^2+1}{(r-1)^2} - \frac{4r}{(r-1)^2} \cos \omega t} = \frac{(r^2-1)\omega}{2(r^2+1) - 4r \cos \omega t}.$$

Um die Ableitung von F_r zu berechnen, müssen wir das noch mit $-2/\omega$ multiplizieren, was genau den Integranden ergibt. Somit ist F_r eine Stammfunktion von I_r .

Daß es mit dieser Stammfunktion ein Problem gibt, sieht man spätestens dann, wenn man naiv einsetzt und auf

$$\int_0^T I_r(t) dt = F_r(T) - F_r(0) = 0 - 0 = 0$$

kommt, denn aus geometrischen Gründen ist völlig klar, daß das Integral für $r < 1$ positiv sein muß.

Das Problem ist natürlich die Singularität des Tangens im Punkt $\frac{T}{2}$: Für $t = \frac{T}{2}$ ist F_r nicht definiert, da der Tangens dort gegen plus oder minus unendlich geht – je nachdem, von welcher Seite wir kommen. Damit ist F_r keine auf dem ganzen Integrationsintervall definierte Stammfunktion, und das Integral kann nicht einfach durch Einsetzen der oberen und der unteren Grenze berechnet werden.

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von F_r existieren allerdings auch für $t = \frac{T}{2}$:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ positiv und geht gegen $+\infty$ für $t \rightarrow \frac{T}{2}$. Da der Faktor vor dem Tangens für alle $r \in (-1, 1)$ negativ ist, folgt

$$\lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t < T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ dagegen ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ negativ und geht gegen $-\infty$ für $t \rightarrow \frac{T}{2}$. Somit ist

$$\lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t > T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \rightarrow \infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}.$$

Abbildung 14 zeigt die Funktion F_r mit ihrer Sprungstelle in der Intervallmitte.

Zur Berechnung des Integrals von I_r über eine Periode spalten wir es auf in zwei Teilintegrale über Intervalle, in denen wir eine Stammfunktion

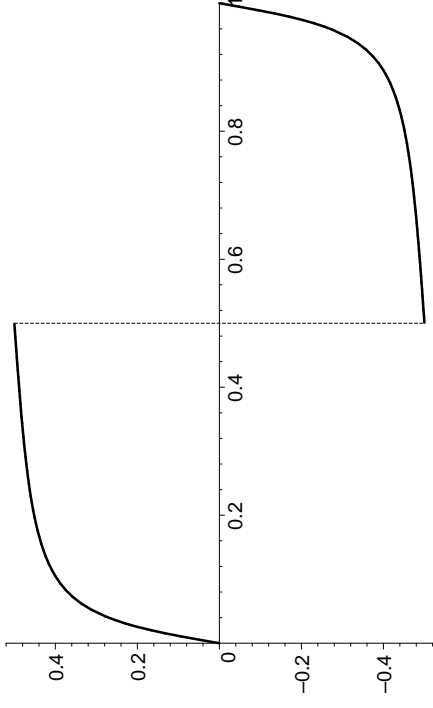


Abb. 14: $F_r(t)$ für $r = 0,8$ und $T = 2$

haben, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^T I_r(t) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t) dt \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t < T/2}} F_r(t) - F_r(0) + F_r(T) - \lim_{\substack{t \rightarrow T/2 \\ t > T/2}} F_r(t) \\ &= \frac{T}{2} - 0 + 0 + \frac{T}{2} = T. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_r(t) dt = 1 \quad \text{für alle } r \in (-1, 1)$$

und

$$\frac{T}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Lassen wir nun r gegen eins gehen, ändert sich natürlich nichts an diesen Formeln, aber die beiden Integrale konzentrieren sich immer mehr auf

die Umgebung von $t = 0$ bzw. $t = T$. Damit ist anschaulich ziemlich klar, daß für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{r}} f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau + \int_{\frac{T}{r}}^T f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)), \end{aligned}$$

denn für $r \rightarrow 1$ geht $I_r(t)$ gegen null für alle t im Integrationsbereich außer $t = 0$ und $t = T$. Auf die genauen Abschätzungen zum Beweis dieser Aussage sei verzichtet.

Stattdessen wenden wir die Aussage an auf die Funktion f aus dem Satz; dafür besagt sie, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $|r| < 1$ ist

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t}$$

absolut und gleichmäßig konvergent; deshalb kann die Summation mit Integration vertauscht werden und wir erhalten für $I_r \star f$ auch den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_r \star f(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-k \cdot i\omega \tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} \cdot \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle FOURIER-Koeffizienten von f verschwinden, ist also $I_r \star f(t) = 0$ für alle r vom Betrag kleiner eins. Damit ist aber auch

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

wie behauptet. ■

Das war ein langer Beweis für eine nicht sonderlich aufregende Aussage; der Satz hat jedoch weitreichende Konsequenzen:

Eindeutigkeitssatz: a) Haben zwei Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, für die $f(t)$ in jedem Punkt der Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert ist, dieselben FOURIER-Koeffizienten, so sind sie gleich.

b) Haben zwei beliebige Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so unterscheiden sie sich höchstens an Unstetigkeitsstellen einer der beiden Funktionen.

Beweis: a) ist klar, denn dann erfüllt $f - g$ die Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes.

Um b) auf a) zurückzuführen, definieren zwei neue Funktion

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(t) = \frac{1}{2} (g(t^+) + g(t^-)),$$

die nach aus $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Diese unterscheiden sich von f bzw. g höchstens in deren Unstetigkeitsstellen; insbesondere haben f und \tilde{f} sowie g und \tilde{g} also dieselben FOURIER-Koeffizienten. Nach a) ist daher $\tilde{f} = \tilde{g}$ und die ursprünglichen Funktionen f und g unterscheiden sich davon höchstens in ihren jeweiligen Unstetigkeitsstellen. ■

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf eine stetige stückweise differenzierbare Funktion f : Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß deren FOURIER-Reihe absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f konvergiert, die dieselben FOURIER-Koeffizienten wie f hat. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt also

Satz: Die FOURIER-Reihe einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f . ■

Kombinieren wir dies mit den speziellen Beispielen aus §3, so erhalten wir den folgenden

Hauptsatz: $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sei stückweise stetig differenzierbar.

- a) Ist f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe dort gleichmäßig gegen f .
- b) In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen

$$\frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) .$$

- c) In jeder Sprungstelle von f tritt das GIBBS-Phänomen auf, d.h. die Teilsummen der FOURIER-Reihe überschwingen die Funktion um einen Betrag, der asymptotisch gleich der Sprunghöhe mal einem Faktor

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) - 1 \right) \approx 0.089489872$$

ist.

Beweis: Für stetiges f ist a) klar nach dem vorigen Satz und sowohl b) als auch c) sind auch klar, da es keine Sprungstellen gibt, so daß der Wert in b) immer gleich $f(t)$ ist.

Für unstetiges f seien t_1, \dots, t_r die Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0, T)$; die Sprunghöhen dort seien

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} f(t_i^-) - f(t_i^+) .$$

Mit der aus §3c) bekannten Sägezahnsschwungung

$$s(t) = \begin{cases} \frac{T}{4} - \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t < T, \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} ,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T , ist dann

$$s_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2a_i}{T} s(t - t_i)$$

eine weitere stückweise differenzierbare Funktion, die ebenfalls Sprunghöhe a_i an der Stelle t_i hat. Also ist auch

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \sum_{j=1}^r s_j(t)$$

eine stückweise differenzierbare Funktion, die nun aber *keine* Sprünge mehr hat; \tilde{f} ist also stetig und erfüllt daher alle Behauptungen des Satzes.

Für die Funktion s haben wir die drei Behauptungen des Satzes in §3e) und f) explizit nachgerechnet; da sie unter Verschiebung und Reskalierung invariant sind, gelten sie auch für die Funktionen s_j . Damit gelten sie aber auch für $f(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{j=1}^r s_j(t)$. ■

Da praktisch alle Funktionen, deren FOURIER-Reihen man in technischen Anwendungen betrachtet, stückweise differenzierbar sind, wollen wir es für die punktweise Konvergenz bei diesem Satz bewenden lassen; für sonstige stückweise stetige Funktionen wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit einer schwächeren Konvergenzaussage begnügen.

f) Der Satz von Parseval

Im Zusammenhang mit der BESSELschen Ungleichung haben wir bereits die HERMITESchen Produkte in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ miteinander verglichen; jetzt wollen wir sehen, daß sie dieselben Werte liefern. Auch hierbei arbeiten wir mit Faltungen; wesentliches Hilfsmittel ist der folgende, implizit schon im vorigen Abschnitt verwendete

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ überall gleichmäßig gegen $f \star g$; sind $c_k = \widehat{f}(k)$ und $d_k = \widehat{g}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f und g , ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{-k \cdot i \omega t} .$$

Aus diesem Satz lassen sich sehr einfach Eigenschaften der Faltung ableiten, z.B. gilt

- Lemma:** a) Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g = g \star f$
- b) Für $f, g, h \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Beweis: Betrachtet man die FOURIER-Reihen, werden die Behauptungen einfach zum Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen. ■

(Man könnte das Lemma natürlich auch direkt durch Integration beweisen.)

Der obige Satz liefert uns eine deutliche Verschärfung der BESSELSchen Ungleichung:

Satz von Parseval: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}),$$

d.h. für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f und d_k von g ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Zum *Beweis* brauchen wir eine Funktion, deren FOURIER-Koeffizienten die Zahlen $\overline{d_k}$ sind. Komplexe Konjugation der FOURIER-Reihe zu g führt zu

$$\overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k \cdot i \omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k \cdot i \omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k \cdot i \omega t}.$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $-t$, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k \cdot i \omega t}$$

als FOURIER-Reihe von $\tilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$.

Somit ist $f \star \tilde{g}$ eine Funktion mit FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} e^{k \cdot i \omega t}.$$

Da die FOURIER-Reihe einer Faltung stets gleichmäßig konvergiert und dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie die Faltung selbst, folgt aus

dem Eindeutigkeitsatz des vorigen Abschnitts, daß diese Reihe in jedem Punkt t gegen $f \star \tilde{g}(t)$ konvergiert. Speziell für $t = 0$ ist daher einerseits

$$f \star \tilde{g}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

und andererseits

$$f \star \tilde{g}(0) = \tilde{g} \star f(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{g}(-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau.$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Korollar: Sind $c_k = \hat{f}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f , so ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Gelegentlich wird auch dieses Korollar als Satz von PARSEVAL bezeichnet.

Der französische Mathematiker MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÉNES (1755–1836) publizierte nur fünf mathematische Arbeiten; die 1799 veröffentlichte zweite davon enthält den hier betrachteten Satz. Als überzeugter Royalist kam PARSEVAL während der französischen Revolution 1792 ins Gefängnis; später mußte er aus Frankreich fliehen, weil ihn NAPOLEON wegen regimekritischer Gedichte verhaften lassen wollte.

Obiges Korollar liefert oft interessante spezielle Werte unendlicher Reihen: Für den Sägezahn mit Periode 2π etwa ist im Intervall $(0, 2\pi)$

$$s(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ki} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i}{2k} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Die linke Seite der Gleichung aus dem Korollar wird hier also zu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Die rechte Seite läßt sich explizit berechnen als

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Der Satz von PARSEVAL liefert auch schnell die im vorigen Abschnitt angekündigte schwächere Konvergenzaussage für beliebige stückweise stetige periodische Funktionen: Mit dem HERMITESCHEN Produkt in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der üblichen Weise eine Norm

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

definieren und sagen, eine Folge f_1, f_2, \dots konvergiere in der L^2 -Norm gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{2,T} = 0$$

ist. Dann gilt:

Satz: Für jedes $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe in der L^2 -Norm gegen f .

Beweis: Wie wir beim Beweis der BESSELSCHEN Ungleichung gesehen haben, gilt mit $c_k = \hat{f}(k)$ für die Teilsumme

$$S_N = \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i\omega t},$$

daß

$$\|f - S_N\|_{2,T}^2 = \langle f - S_N, f - S_N \rangle = \langle f, f \rangle - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Nach dem Satz von PARSEVAL geht die rechts stehende Differenz für $N \rightarrow \infty$ gegen null, also auch $\|f - S_N\|_{2,T}$. ■

g) Hilbert-Räume

In §2 hatten wir das Problem der harmonischen Analyse verglichen mit dem Problem, einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Orthonormalbasis darzustellen; die einfachste Lösung besteht bekanntlich darin, die Skalarprodukte von \vec{v} mit den Basisvektoren \vec{b}_i zu bilden; dann ist

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n (\vec{v} \cdot \vec{b}_k) \vec{b}_k.$$

Genauso haben wir nun bei der Berechnung einer komplexen FOURIER-Reihe einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = \langle f, e^{k \cdot i\omega t} \rangle$ gebildet für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und gesehen, daß zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen aus $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i\omega t}$$

ist, eine sehr ähnliche Situation also.

Es gibt allerdings einen entscheidenden Unterschied: Im Gegensatz zur endlichen Summe oben haben wir hier eine Summe, in der im allgemeinen unendlich viele der Summanden von Null verschieden sind. Eine solche unendliche Summe kann nur sinnvoll definiert werden, wenn wir einen Konvergenzbegriff haben, wie dies etwa in \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n der Fall ist; über Körpern wie \mathbb{Q} oder auch über endlichen Körpern hätten unendliche Summen überhaupt keine sinnvolle Interpretation.

In der linearen Algebra verlangt man daher aus gutem Grund von einer Basis, daß sich alle Vektoren als *endliche* Linearkombinationen von

Basisvektoren darstellen lassen, auch wenn die Basis selbst unendlich sein kann.

Aus diesem Grund bilden die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und sie sind auch keine Basis des Untervektorraums aus allen stückweise differenzierbaren Funktionen mit der Mittelwerteneigenschaft: Sie bilden nur eine Basis des sehr viel kleineren Untervektorraums der (komplexen) trigonometrischen Polynome. Die in §3b) betrachtete Rechteckschwingung f mit Periode T gehört bereits nicht mehr zu diesem Untervektorraum und ist in der Tat linear unabhängig von den Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$: Andernfalls gäbe es nämlich eine nichttriviale endliche Linearkombination

$$\lambda_0 f(t) + \lambda_1 e^{k_1 \cdot i\omega t} + \dots + \lambda_r e^{k_r \cdot i\omega t} = 0,$$

in der λ_0 nicht verschwinden darf, da sonst die $e^{k \cdot i\omega t}$ linear abhängig wären.

Also wäre

$$f(t) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{k_1 \cdot i\omega t} + \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_0} e^{k_r \cdot i\omega t},$$

$f(t)$ als endliche Linearkombination stetiger und differenzierbarer Funktionen selbst stetig und differenzierbar, was natürlich absurd ist.

Wenn wir die reinen Schwingungen zu einer Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ergänzen wollen, müssen wir also beispielsweise den Rechteckimpuls als neues Basiselement dazunehmen und, wie man sich leicht überlegt, auch noch den Sägezahn. Tatsächlich muß man noch eine ganze Reihe anderer Funktionen mit hinzunehmen, und bis heute hat es niemand geschafft, eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hinzuschreiben.

Der letzte Satz sollte zumindest diejenigen nicht verwundern, die sich aus dem letzten Semester noch an die dortige Diskussion im Zusammenhang mit der Existenz von Basen erinnern: Wir hatten dies nur für endlichdimensionale Vektorräume bewiesen, da es im unendlichdimensionalen Fall logische Schwierigkeiten gibt: Man muß das absolut nichtkonstruktive Auswahlaxiom benutzen, das zu allem Überfluß auch noch von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist, so daß zumindest im Prinzip auch eine Mathematik ohne Auswahlaxiom möglich ist. Dort ist dann nicht beweisbar, daß jeder Vektorraum eine Basis hat – was freilich nicht bedeutet, daß nun beweisbar wäre, daß irgendein Vektorraum *keine* Basis hätte.

Von daher ist zumindest für alle praktischen Zwecke das System der Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ die beste Annäherung an eine Basis, die man bekommen kann.

Sie ist in vielfacher anderer Hinsicht eine Verallgemeinerung der Standardbasis des \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n : Beispielsweise besagt der Satz von PARSEVAL, daß wir den Abstand (bezüglich der L_2 -Norm) zwischen zwei Funktionen, die beide bezüglich dieser Basis dargestellt sind, genauso ausrechnen können, wie wir das vom EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Abstand her gewohnt sind – nur daß wir es jetzt eben mit einer unendlichen Summe von Quadraten zu tun haben.

Da eine solche Situation in Funktionenräumen alles andere als selten vorkommt und FOURIER-Reihen beileibe nicht die einzigen unendlichen Summen ihrer Art mit praktischer Bedeutung sind, hat die Mathematik hierfür einen Begriffsapparat nebst zugehörigen Techniken entwickelt, die wir hier in dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt brauchen, die aber in manchen Gebieten beispielsweise der Signalverarbeitung oder der optischen Übertragungstechnik eine wichtige Rolle spielen, die Theorie der HILBERT-Räume:

Definition: Ein EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum V heißt HILBERT-Raum, wenn jede CAUCHY-Folge aus V gegen ein Element von V konvergiert.



DAVID HILBERT (1862–1943) wurde in Königsberg geboren, wo er auch zur Schule und zur Universität ging. Er promovierte dort 1885 mit einem Thema aus der Invariantentheorie, habilitierte sich 1886 und bekam 1893 einen Lehrstuhl. 1895 wechselte er an das damalige Zentrum der deutschen wie auch internationalen Mathematik, die Universität Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 lehrte. Seine Arbeiten umfassen ein riesiges Spektrum aus unter anderem Invariantentheorie, Zahlentheorie, Geometrie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik sowie auch zur Relativitätstheorie. Er gilt als einer der Väter der modernen Algebra.

Offensichtlich ist jeder EUKLIDISCHE oder HERMITESCHE Vektorraum endlicher Dimension ein HILBERT-Raum, denn wir können den Raum

vermöge irgendeiner Orthonormalbasis mit \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n identifizieren und das CAUCHYSche Konvergenzkriterium komponentenweise anwenden. Von den unendlichdimensionalen Vektorräumen $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die uns in Augenblick interessieren, ist leider keiner ein HILBERT-Raum, denn wie wir schon gesehen haben ist weder $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein EUKLIDISCHER noch $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein HERMITESCHER Vektorraum, da es stückweise stetige Funktionen gibt, deren Norm $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ verschwindet, ohne daß f die Nullfunktion wäre.

Wenn wir uns auf die Unterräume $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beschränken, haben wir zwar Skalarprodukte, aber die Vollständigkeit ist alles andere als klar.

Dieses Problem wollen wir (wie in den Anwendungen üblich) weitgehend ignorieren; wir bezeichnen einfach für *jeden* \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum V mit einem Produkt, das bis auf die Forderung

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies f \equiv 0$$

EUKLIDISCH bzw. HERMITESCH ist, eine Teilmenge $H \subseteq V$ als HILBERT-Raumbasis, wenn es für jedes Element $f \in V$ eine Folge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus H und eine Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß

$$\delta_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i - f$$

für $N \rightarrow \infty$ die Eigenschaft hat, daß $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \delta_N, \delta_N \rangle = 0$ ist.

In diesem Sinne ist das System der Funktionen $e^{k \cdot i \omega t}$ nach der Diskussion im vorigen Abschnitt eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (auch wenn wir das nur für den Untervektorraum der stückweise differenzierbaren Funktionen beweisen haben), und damit ist auch das System der Funktionen $1, \sin k \omega t, \cos \ell \omega t$ eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solche HILBERT-Raumbasen sind in dieser Allgemeinheit leider noch nicht sonderlich nützlich für praktische Anwendungen: Will man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von *irgendeiner* Basis $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ darstellen, muß man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten lösen. Für endliches n ist das für große n zwar

nicht mehr sehr angenehm, aber doch grundsätzlich möglich und per Computer auch noch für n in der Größenordnung von hundert Tausend durchaus praktikabel.

Wird die Dimension allerdings unendlich, so läßt sich ein System aus unendlich vielen Gleichungen in unendlich vielen Variablen nur in sehr speziellen Fällen wirklich lösen; einer davon ist der, den wir bei der Berechnung des FOURIER-Reihe ausgenutzt haben: Im Falle einer abzählbaren orthogonalen HILBERT-Raumbasis $\{\vec{b}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \vec{b}_i$$

leicht berechenbar; noch einfacher wird es, wenn wir von einer orthogonalen HILBERT-Raumbasis ausgehen, da dann alle Nenner eins sind. Solche orthogonale bzw. orthonormale HILBERT-Raumbasen bezeichnet man als *vollständige Orthogonalsysteme* bzw. *vollständige Orthonormalsysteme*.

h) Die Poisson-Formel

Der Konvergenzbeweis für FOURIER-Reihen war sehr abstrakt; in diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß die Methoden, die wir dabei kennengelernt haben, auch nützlich sein können bei der Lösung eines praktischen Problems:

Bei bildgebenden Verfahren der Medizintechnik, bei Werkstoffuntersuchungen, Wärmeleitungsproblemen und vielen anderen Anwendungen hat man es oft mit folgendem *Randwertproblem* zu tun: Man kennt eine Funktion am Rand einer Fläche oder eines Volumens und möchte sie auch im (physikalisch oft unzugänglichen) Innern berechnen.

Sofern man keine einschränkenden Annahmen über die Funktion macht, ist dieses Problem natürlich weit von einer eindeutigen Lösbarkeit entfernt; in vielen interessanten Fällen ist es allerdings eindeutig lösbar.

Wir wollen hier nur ein ganz einfaches Beispiel betrachten: eine auf der Kreislinie bekannte Funktion, die ins Kreisinnere hinein fortgesetzt werden soll. Dabei wollen wir verlangen, daß die Funktion überall der

Kontinuitätsgleichung $\Delta u = 0$ genügt, wie das beispielsweise für elektrische Potentiale in Abwesenheit von Ladungen der Fall ist. Solche Funktionen haben wir bereits in §1 betrachtet und dort als *harmonische* Funktionen bezeichnet; wir wissen, daß sie gerade die Realteile holomorpher Funktionen sind.

Wie wir aus §1d) wissen, ist eine holomorphe Funktionen nach der CAUCHYSchen Integralformel im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebiets durch ihre Werte auf der Randkurve bestimmt; nun wollen wir mit Hilfe von FOURIER-Reihen eine entsprechende Formel für harmonische Funktionen finden.

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist der LAPLACE-Operator nach [HMI], Kap. 2, §2g1) gleich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi};$$

für $u(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi$ und $u(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi$ rechnet man leicht nach, daß $\Delta u = 0$ ist. Damit ist auch

$$\Delta(r^{\pm k} e^{\pm k \cdot i \varphi}) = 0$$

und allgemeiner

$$\Delta u(r, \varphi) = 0 \quad \text{für} \quad u(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{k \cdot i \omega t},$$

falls die Summe konvergiert. Für ein Randwertproblem ist die Funktion brauchbar, wenn zusätzlich auch noch

$$u_0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \varphi)$$

für alle Winkel φ existiert.

Ein spezielles Beispiel einer konvergenten Summe ist die Funktion I_r aus Abschnitt e); wenn wir als Argument anstelle von ωt die Winkelvariable φ einsetzen, ist für $|r| < 1$

$$I_r(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i \varphi} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}.$$

Da $I_r \star u_0$ für stetige Funktionen im Limes $r \rightarrow 1$ gerade u_0 ist, ist für eine vorgegebene Funktion u_0

$$u(r, \varphi) = I_r \star u_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)u_0(\psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi$$

eine Fortsetzung ins Innere mit $\Delta u(r, \varphi) = 0$. Das ist die POISSONSche Integralformel zur Lösung dieses einfachen Randwertproblems.



SIMÉON DENIS POISSON (1781–1842) studierte zunächst Medizin, dann ab 1798 Mathematik an der *Ecole Polytechnique* bei LAPLACE und LAGRANGE. 1802 bekam er eine Stelle als Astronom am *Bureau des Longitudes*, 1809 wurde er Professor für reine Mathematik an der neugegründeten *Faculté des Sciences*. Er arbeitete hauptsächlich über bestimmte Integrale und FOURIER-Theorie, schrieb aber auch ein wichtiges Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (in dem die POISSON-Verteilung erstmalig auftaucht) und Arbeiten über Mechanik, Astronomie, Elektrizität und Magnetismus.

§5: Fourier- und Laplace-Transformationen

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Kosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind: Da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache einer festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe zumindest die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben.

Daher brauchen wir für nichtperiodische Funktionen im Allgemeinen ein kontinuierliches Frequenzspektrum; dieses liefert uns für hinreichend