WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

1. Februar 2008

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = 2i$!

Lösung: $2i = 2e^{\pi i/2}$, also ist $z = \sqrt{2}\cdot e^{-\pi i/4} = \sqrt{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1+i$ eine Lösung. (Die andere ist natürlich $-z$.)
Alternativ: Schreibe $z = x + iy$. Dann ist $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 2i$ genau dann, wenn $x = \pm y$ und $2xy = 2$ ist. Also muß $x = y = \pm 1$ sein.

2) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = 2\sin^2 t + 8\sin^4 t$!

Lösung: $2\sin^2 t + 8\sin^4 t = 2\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right)^4$

$$= -\frac{e^{2it} - 2 + e^{-2it}}{2} + \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{2} = 4 - 5\cos 2t + \cos 4t\,.$$

3) Richtig oder falsch: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Falsch,* denn sie hat offensichtlich nur den Eigenwert drei, und einziger Eigenvektor dazu ist der dritte Einheitsvektor. Die geometrische Vielfachheit eins ist also kleiner als die algebraische Vielfachheit drei.

4) Richtig oder falsch: Für jede invertierbare reelle $n \times n$-Matrix A ist $\left(e^A\right)^{-1} = e^{(A^{-1})}$.

Lösung: *Falsch:* Ist etwa $A = 2E$, so ist $e^A = e^2E$, also $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-2}E$, aber $A^{-1} = \frac{1}{2}E$ und $e^{(A^{-1})} = \sqrt{e}\,E$.

5) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 4\sqrt{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch:* Sowohl $y(t) \equiv 0$ als auch $y(t) = 4t^2$ sind Lösungen.

6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = x(t) - y(t)^3 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) - 4y(t)\,!$$

Lösung: (x, y) ist genau dann ein Gleichgewichtspunkt, wenn $x - y^3 = 0$ und $x - 4y = 0$ ist. Also ist $x = y^3$ und $y^3 - 4y = y(y^2 - 4) = 0$. Letztere Gleichung hat die Lösungen $y = 0$ und $y = \pm 2$; die drei Fixpunkte sind somit $(0, 0)$, $(8, 2)$ und $(-8, -2)$.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ kann $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n\,dx}{x^4+5x^2+4}$ mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden?

Lösung: Der Nenner ist eine quadratische Funktion von x^2; die Summe ihrer beiden Nullstellen ist minus fünf und das Produkt vier, also ist

$$x^4+5x^2+4 = (x^2+1)(x^2+4) = (x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i)\,.$$

Insbesondere gibt es keine reellen Nullstellen. Daher kann das Integral für $n = 0, 1$ und 2 via Residuenkalkül berechnet werden, denn genau dann ist der Zählergrad um mindestens zwei kleiner als der Nennergrad.

b) Berechnen Sie das Integral für $n = 0$!

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, verschwindet der Nenner bei $\pm i$ und $\pm 2i$; für die Berechnung des Integrals sind nur die Residuen der Nullstellen mit positivem Imaginärteil relevant, also $z_1 = i$ und $z_2 = 2i$. Beides sind einfache Nullstellen, so daß wir die Residuen nach der Limesformel berechnen können:

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4+5z^2+4} = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{2i\cdot 3} = \frac{1}{6i}$$

und

$$\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{1}{z^4+5z^2+4} = \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z^2+1)(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{(-3)\cdot 4i} = \frac{-1}{12i}$$

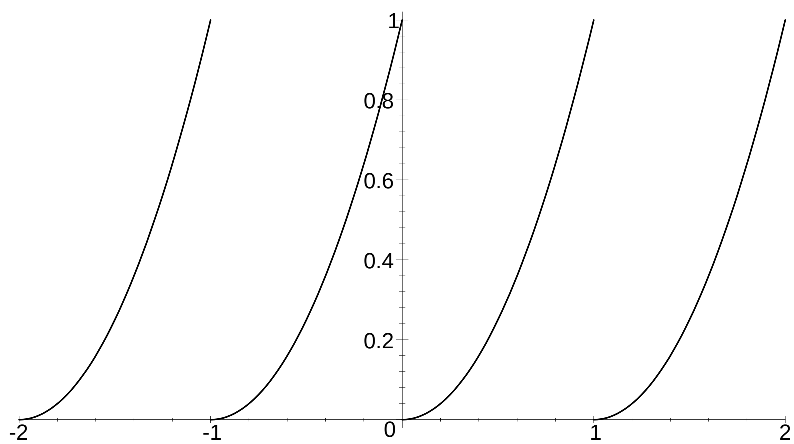
Somit ist $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\right) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}\,.$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(t) = \big(t-[t]\big)^2$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich t bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-2, 2]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist weder gerade noch ungerade.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Lösung: f ist periodisch mit Periode eins; die Kreisfrequenz ist also $\omega = 2\pi$.
Der konstante Term ist der Mittelwert über eine Periode, also ist

$$c_0 = \int_0^1 t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Die Koeffizienten der Kosinusterme sind nach der Formel am Ende der Klausur

$$a_k = 2\int_0^1 t^2 \cos 2k\pi t\,dt = 2\cdot\left.\left(\left(\frac{t^2}{2k\pi} - \frac{2}{(2k\pi)^3}\right)\sin 2k\pi t + \frac{4t}{(2k\pi)^2}\cos 2k\pi t\right)\right|_0^1 = \frac{4}{(2k\pi)^2} = \frac{1}{k^2\pi^2}\,,$$

die der Sinusterme

$$b_\ell = 2\int_0^1 t^2 \sin 2\ell\pi t\,dt = 2\cdot\left.\left(\left(\frac{2}{(2\ell\pi)^3} - \frac{t^2}{2\ell\pi}\right)\cos 2\ell\pi t + \frac{4t}{(2\ell\pi)^2}\sin 2\ell\pi t\right)\right|_0^1 = -\frac{2}{2\ell\pi} = -\frac{1}{\ell\pi}\,.$$

Die FOURIER-Reihe von f ist somit

$$S_f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\pi t}{k^2\pi^2} - \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sin 2\ell\pi t}{\ell\pi}\,.$$

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: Genau an den Unstetigkeitsstellen, also bei den ganzzahligen Werten. Die Reihe konvergiert dort gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwert, also gegen $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{für } 0 \le |t| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Lösung: Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-1}^{1} t^2 e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Für das erste Integral kennen wir die Stammfunktion $e^{-i\omega t}/(-i\omega) = \frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}$; für das zweite steht die Stammfunktion

$$\left(\frac{t^2}{-i\omega} - \frac{2t}{-\omega^2} + \frac{2}{i\omega^3}\right)e^{-i\omega t}$$

im Anhang zur Klausur. Somit ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \frac{i}{\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) + \frac{i}{\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) + \frac{2}{\omega^2}(e^{-i\omega} + e^{i\omega}) - \frac{2i}{\omega^3}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) \\
&= \left(\frac{2i}{\omega} - \frac{2i}{\omega^3}\right)(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) + \frac{2}{\omega^2}(e^{-i\omega} + e^{i\omega}) \\
&= \left(\frac{4}{\omega} - \frac{4}{\omega^3}\right)\sin\omega + \frac{4}{\omega^2}\cos\omega\,.
\end{aligned}$$

b) Was ist die LAPLACE-Transformierte von f ?

Lösung: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^1 (1-t^2)e^{-st}\,dt = \int_0^1 e^{-st}\,dt - \int_0^1 t^2 e^{-st}\,dt$ läßt sich ebenfalls mit der Formel aus dem Anhang berechnen zu $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2e^{-s}}{s^2} + \dfrac{2(e^{-s}-1)}{s^3}$.

c) Wo verschwindet die Faltung $f * f$?

Lösung: $f * f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)f(s)\,ds$ verschwindet für $|t| \geq 2$, da dann der Integrand für jedes s verschwindet. Für $|t| < 2$ gibt es stets zumindest ein Teilintervall, in dem der Integrand positiv ist; da er nirgends negativ wird, ist dort daher $f * f(t) \neq 0$.

d) Was ist die FOURIER-Transformierte von $f * f$?

Lösung: Das Quadrat von $\widehat{f}(\omega)$, also $\left(\left(\frac{4}{\omega} - \frac{4}{\omega^3}\right)\sin\omega^M + \frac{4}{\omega^2}\cos\omega\right)^2$.

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Wir berechnen das charakteristische Polynom von A durch Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\big((\lambda+1)(\lambda+5)+4\big) = (3-\lambda)(\lambda^2+6\lambda+9) = (3-\lambda)(\lambda+3)^2\,.$$

Es gibt also die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm 3$. $\lambda_1 = 3$ hat die algebraische und damit auch geometrische Vielfachheit eins; $\lambda_2 = -3$ hat algebraische Vielfachheit zwei.
Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$ wird offensichtlich aufgespannt vom zweiten Basisvektor, denn A mal der zweite Basisvektor ist die zweite Spalte der Matrix, und die ist gerade das Dreifache dieses Vektors. Also haben wir den Eigenvektor $\vec{v}_1 = \vec{b}_2$.
Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -3$ werden von der Matrix

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

annulliert. Wie uns deren zweite Zeile zeigt, muß die zweite Komponente eines jeden Eigenvektors verschwinden, und nach den beiden anderen Zeilen muß die dritte Komponente gleich (-2)-mal der ersten sein. Der Eigenraum ist daher nur eindimensional und wird aufgespannt vom Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist daher nur gleich eins.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts -3 ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Wir haben bereits zwei Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$; da λ_2 geometrische Vielfachheit eins aber algebraische Vielfachheit zwei hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe für λ_2. Da

$$(A + 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, besteht der Hauptraum aus allen Vektoren mit zweiter Komponente null; ein solcher Vektor, der nicht im Eigenraum liegt, ist beispielsweise der dritte Basisvektor $\vec{v}_3 = \vec{b}_3$. $A\vec{b}_3$ ist gleich der dritten Spalte von A, und diese ist gleich $-3\vec{b}_3 + \vec{v}_2$. Bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ hat A somit die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da N den dritten Basisvektor auf den zweiten abbildet und diesen wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix. Außerdem kommutieren N und D, also ist

$$e^{\Delta t} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} (E + Nt)$$
$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ als Spalten, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wie man entweder sofort sieht oder nach einer Zeilenvertauschung und einer Zeilenoperation mit dem GAUSS-Algorithmus. Damit ist

$$e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-3t} & 0 & te^{-3t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ -4te^{-3t} & 0 & (1-2t)e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) + z(t), \quad \dot{y}(t) = 3y(t), \quad \dot{z}(t) = -4x(t) - 5z(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = -2$! *Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“* $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3te^{-2t} & 2 & -2te^{-2t} \\ 0 & e^t & te^{-2t} \\ 3te^{-2t} & 3 & e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{pmatrix}$ *arbeiten.*

Lösung: Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, und seine Koeffizientenmatrix ist die gerade betrachtete Matrix A. Die einzige Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \\ -2e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

d.h. $x(t) = e^{-3t}$, $\quad y(t) = 0 \quad$ und $\quad z(t) = -2e^{-3t}$.

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Die x- und z-Komponente gehen mit e^{-3t} gegen null. Die y-Komponente bleibt konstant null.

g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Lösung: Sobald der Anfangswert für $y(t)$ nicht mehr verschwindet, geht $y(t)$ gegen $\pm\infty$ statt identisch zu verschwinden, da dann auch der Term e^{3t} auftritt. Am qualitativen Verhalten von $x(t)$ und $z(t)$ ändert sich nichts.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 18y(t) = 90\cos 6t\,!$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 18y(t) = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 6\lambda + 18 = (\lambda + 3)^2 + 9 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -3 \pm 3i$, und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y(t) = e^{-3t}(a\cos 3t + b\sin 3t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können als unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = c\cos 6t + d\sin 6t$. Dann ist $\dot{x}(t) = 6d\cos 6t - 6c\sin 6t$ und $\ddot{x}(t) = -36c\cos 6t - 36d\sin 6t$, also

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 18x(t) &= (-36c + 36d + 18c)\cos 6t + (-36d - 36c + 18d)\sin 6t\\ &= (-18c + 36d)\cos 6t + (-36c - 18d)\sin 6t\,.\end{aligned}$$

Dies muß gleich der rechten Seite $90\cos 6t$ sein, c und d sind somit Lösungen des linearen Gleichungssystems $-18c + 36d = 90$ und $36c + 18d = 0$. Nach der zweiten Gleichung ist $d = -2c$; Einsetzen in die erste Gleichung führt auf $-90c = 90$, also ist $c = -1$ und $d = 2$. Die gesuchte allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = 2\sin 6t - \cos 6t + e^{-3t}(a\cos 3t + b\sin 3t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-3t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = 2\sin 6t - \cos 6t$, also gegen eine reine Schwingung.

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = -2ty(t)^2$ mit $y(0) = 1$!

Lösung: Das ist offensichtlich eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen: Wann immer $y(t) \neq 0$ ist, ist sie äquivalent zu $\dfrac{\dot{y}(t)}{y(t)^2} = -2t$.

Für die Lösung des Anfangswertproblems gilt daher

$$\int_1^{y(t)} \frac{d\eta}{\eta^2} = -2\int_0^t \tau\,d\tau\,, \text{ d.h. } \quad -\frac{1}{y(t)} + 1 = -t^2\,.$$

Damit ist $y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.