

1. Februar 2008

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: (je zwei Punkte)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = 2i$!
- 2) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = 2 \sin^2 t + 8 \sin^4 t$!
- 3) Richtig oder falsch: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.
- 4) Richtig oder falsch: Für jede invertierbare reelle $n \times n$ -Matrix A ist $(e^A)^{-1} = e^{(A^{-1})}$.
- 5) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 4\sqrt{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.
- 6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = x(t) - y(t)^3 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) - 4y(t)!$$

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ kann $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$ mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden?
- b) Berechnen Sie das Integral für $n = 0$!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(t) = (t - [t])^2$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich t bezeichnet.

- a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-2, 2]$!
- b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?
- c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !
- d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

• • •

Bitte wenden!

• • •

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{für } 0 \leq |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!
- b) Was ist die LAPLACE-Transformierte von f ?
- c) Wo verschwindet die Faltung $f * f$?
- d) Was ist die FOURIER-Transformierte von $f * f$?

Aufgabe 4: (12 Punkte)

- a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!
- b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?
- c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?
- d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?
- e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) + z(t), \quad \dot{y}(t) = 3y(t), \quad \dot{z}(t) = -4x(t) - 5z(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = -2$! Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie

hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“ $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3te^{-2t} & 2 & -2te^{-2t} \\ 0 & e^t & te^{-2t} \\ 3te^{-2t} & 3 & e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{pmatrix}$ arbeiten.

- f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \rightarrow \infty$?
- g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 18y(t) = 90 \cos 6t!$$

- b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \rightarrow \infty$?

Aufgabe 6: (3 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = -2ty(t)^2$ mit $y(0) = 1$!

H I L F S M I T T E L

Als Hilfsmittel sind nur Taschenrechner ohne Graphik und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

H I N W E I S E

$$\int t^2 \cos at \, dt = \left(\frac{t^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin at + \frac{2t}{a^2} \cos at + C \quad \int t^2 \sin at \, dt = \left(\frac{2}{a^3} - \frac{t^2}{a} \right) \cos at + \frac{2t}{a^2} \sin at + C$$

$$\int t^2 e^{at} \, dt = \left(\frac{t^2}{a} - \frac{2t}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{at} + C$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe, notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • •

Steht Ihr Name auf jedem Blatt?

• • •