WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

30. Januar 2008

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ mit $x^2 + z^2 = 0$ ist ein Untervektorraum.

Lösung: *Richtig,* denn $x^2 + z^2 = 0$ bedeutet für reelle Zahlen x, z, daß $x = z = 0$ sein muß, also ist M der von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ augespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

2) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ mit $x^2 + z^2 = 0$ ist ein Untervektorraum.

Lösung: *Richtig,* denn in $\mathbb{F}_2$ ist jedes der beiden Elemente gleich seinem Quadrat, die Gleichung $x^2 + z^2 = 0$ ist also äquivalent zu $x + z = 0$ oder $x = z$. Diese Bedingung erfüllt sowohl der Nullvektor als auch jede Linearkombination von Vektoren dieser Art. Konkret ist

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

3) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^3 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist auch $A = E$.

Lösung: *Falsch,* auch die Permutationsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ oder beispielsweise die Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos 120° & -\sin 120° & 0 \\ \sin 120° & \cos 120° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und verschiedene andere Matrizen haben die Einheitsmatrix als dritte Potenz.

4) Bestimmen Sie die Determinante der 4×4-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$!

Lösung: Da alle Spalten Vielfache der ersten sind, hat die Matrix nur Rang eins und damit natürlich Determinante Null.

5) Finden Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$, die den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ enthält!

Lösung: Da $\mathbb{C}^2$ zweidimensional ist, brauchen wir nur einen Vektor zu finden, der senkrecht auf $\binom{1}{i}$ steht. Das ist zum Beispiel der Vektor $\binom{1}{-i}$, denn $1 \cdot \overline{1} + i \cdot \overline{-i} = 1^2 + i^2 = 0$.

6) Für welche $a \in \mathbb{C}$ sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^2$ linear abhängig?

Lösung: Genau dann, wenn ihre Determinante $\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4$ verschwindet, wenn also $a^4 = 1$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = \pm 1$ oder $a = \pm i$ ist.

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x, y) = \sin(x+y) + \cos(x^2 - y^2)$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wie aus Schule und/oder Analysis I bekannt, ist

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos w = 1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{24} + \cdots .$$

In diese Formeln müssen wir $z = x + y$ *bzw.* $w = x^2 - y^2$ einsetzen. Offensichtlich liefern dann die Potenzen z^n Linearkombinationen von Monomen in x, y vom Grad n und die w^n solche vom Grad $2n$, + d.h. das TAYLOR-Polynom vierten Grades von f ist

$$\begin{aligned} &(x+y) - \frac{(x+y)^3}{6} + 1 - \frac{(x^2-y^2)^2}{2} \\ &= x + y - \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{6} + 1 - \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2} \\ &= 1 + x + +y - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2 3y}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{x^4}{2} - x^2y^2 + \frac{y^4}{2} . \end{aligned}$$

8) Was ist $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$?

Lösung: Das Null-Vektorfeld, denn die Rotation eines Gradientenfelds verschwindet.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier in x, in denen kein Term mit x^2 vorkommt.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Die Elemente von V lassen sich eindeutig in der Form

$$f = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_1 x + a_0 \quad \text{mit} \quad a_0, a_1, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

schreiben; daher bilden die x-Potenzen x^4, x^3, x und 1 eine Basis.

b) Welche Dimension hat V ?

Lösung: Da es eine vierelementige Basis gibt, ist $\dim V = 4$.

c) Zeigen Sie: $f \mapsto x^2 f'' - 6f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to V$.

Lösung: Multiplikation mit x^2, Ableitung und Addition von Polynomen sind allesamt lieare Operationen, also definiert φ zumindest einmal eine lineare Abbildung in den Vektorraum *aller* reeller Polynome.

Zu zeigen bleibt, daß $\varphi(f)$ für $f \in V$ wieder in V liegt. Dazu reicht es, die Bilder der vier Polynome aus der Basis zu betrachten:

$$\varphi(x^4) = x^2 \cdot 4 \cdot 3x^2 - 6x^4 = 6x^4, \quad \varphi(x^3) = x^2 \cdot 3 \cdot 2x - 6x^2 = 0,$$
$$\varphi(x) = x^2 \cdot 0 - 6x = -6x \quad \text{und} \quad \varphi(1) = x^2 \cdot 0 - 6 = -6$$

liegen offensichtlich alle drei in U.

d) Welche Dimensionen haben Kern φ und Bild φ?

Lösung: Nach *c)* wird das Bild von φ erzeugt von den drei Basispolynomen x^4, x und 1, ist also dreidimensional. Nach der Dimensionsformel ist daher

$$\dim \operatorname{Kern} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Bild} \varphi = 4 - 3 = 1\,.$$

Erzeugt wird der Kern natürlich vom x^3.

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *a)*?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; wie die Rechnungen aus *c)* zeigen, werden diese jeweils auf Vielfache von sich selbst abgebildet; die Abbildungsmatrix ist also die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

f) Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

Lösung: Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind die Diagonaleinträge, hier sind das also die Zahlen ± 6.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 1 & (1) \\ 2x + 3y + z = 2 & (2) \\ x + 3y - a^2 z = -a & (3) \end{array}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z = 1/(a-1)$.

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{array}{rl} y - z = 0 & (4) \\ 2y - (a^2+1)z = -a - 1 & (5) \end{array}$$

Subtrahiert man zweimal Gleichung (4) von (5) (oder setzt einfach $z = y$ in Gleichung (5) ein), erhält man schließlich die GLeichung

$$(1 - a^2)z = -a - 1 \quad \text{oder} \quad (a^2 - 1)z = (a+1)(a-1)z = a + 1\,.$$

Für $a = 1$ steht hier $0 = 2$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem somit unlösbar.
Für $a = -1$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die von jeder reellen Zahl $z = \lambda$ erfüllt wird.

Für $a \neq \pm 1$ schließlich können wir durch $(a+1)(a-1)$ dividieren und erhälten die einzige Lösung

$$z = \frac{1}{a-1}\,.$$

Nach Gleichung (4) ist $y = z$ dasselbe, und nach (1) ist

$$x = 1 - y - z = 1 - 2z = \begin{cases} 1 - \frac{2}{a-1} = \frac{a-3}{a-1} & \text{falls } a \neq \pm 1 \\ 1 - 2\lambda & \text{falls } a = -1 \end{cases}\,.$$

$$\text{Somit ist } \mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(\frac{a-3}{a-1}, \frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)\right\} & \text{für } a \neq \pm 1 \\ \left\{(1-2\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = -1 \\ \emptyset & \text{für } a = 1 \end{cases}\,.$$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 9\big) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = (2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4)\,, \end{aligned}$$

denn aus $(1-\lambda)^2 = 9$ folgt $1-\lambda = \pm 3$, also $\lambda = 1 \mp 3$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 4$.

Da die zweite Spalte von A den zweifachen zweiten Basisvektor enthält, ist dieser Basisvektor Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Für die anderen Eigenwerte müssen wir rechnen:

$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; für einen Vektor $\vec{v}_1$ mit $(A + 2E)\vec{v}_1 = \vec{0}$ muß also die erste Komponente das Negative der dritten sein und die zweite verschwinden.

$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; hier folgt entsprechend, daß die erste Komponente des Eigenvektors gleich der dritten sein muß und die zweite wieder verschwindet.

Als Eigenvektoren zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ können wir daher die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nehmen.

b) Hat $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Lösung: Da wir drei Eigenvektoren haben und

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \lambda - \nu \\ \mu \\ \lambda + \nu \end{pmatrix}$$

nur dann der Nullvektor sein kann, wenn λ, μ und ν allesamt verschwinden, bilden diese Vektoren eine solche Basis.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{v}$, für den zweiten nehmen wir eine Linearkombination $\vec{w} + \lambda\vec{v}$, deren Produkt mit $\vec{v}$ verschwindet:

$$(\vec{w} + \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = 25 + 25\lambda$$

verschwindet genau dann, wenn $\lambda = -1$ ist, der zweite Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{w} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst ist genau wir $\cdot\vec{v}$ gleich 25, also haben beide die Länge fünf. Die gesuchte Orthonormalbasis besteht somit aus den Vektoren

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

b) *Ditto* für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1-i \\ i \\ 3+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: Wieder suchen wir als erstes eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{x}$, für den zweiten machen wir einen Ansatz $\vec{y} + \lambda\vec{x}$ derart, daß $(\vec{y} + \lambda\vec{x}) \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} + \lambda\vec{x} \cdot \vec{x}$ verschwindet. Hier ist

$$\vec{y} \cdot \vec{x} = (1-i) \cdot 2 + i \cdot \bar{i} + (3+i) \cdot 2 = 2 - 2i + 1 + 6 + 2i = 9 \quad \text{und} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9\,,$$

wir müssen also $\lambda = -1$ wählen und erhalten als zweiten Vektor der Orthogonalbasis

$$\vec{z} = \vec{y} - \vec{x} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} .$$

Da $\vec{z} \cdot \vec{z} = (-1-i)(-1+i) + (1+i)(1-i) = 2 + 2 = 4$ ist und $\vec{x} \cdot \vec{x} = 9$, können wir für die gesuchte Orthonormalbasis also die beiden Vektoren $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$ nehmen.

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin 2x \cos 5y + e^{x^2+2y} \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von

SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2\cos 2x \cos 5y + 2xe^{x^2+2y}\\
f_y(x,y) &= -5\sin 2x \sin 5y + 2e^{x^2+2y}\\
f_{xx}(x,y) &= -4\sin 2x \cos 5y + (4x^2+2)e^{x^2+2y}\\
f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -10\cos 2x \sin 5y + 4xe^{x^2+2y}\\
f_{yy}(x,y) &= -25\sin 2x \cos 5y + 4e^{x^2+2y}
\end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos 2x \cos 5y + 2xe^{x^2+2y} \\ -5\sin 2x \sin 5y + 2e^{x^2+2y} \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4\sin 2x \cos 5y + (4x^2+2)e^{x^2+2y} & -10\cos 2x \sin 5y + 4xe^{x^2+2y} \\ -10\cos 2x \sin 5y + 4xe^{x^2+2y} & -25\sin 2x \cos 5y + 4e^{x^2+2y} \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) \\ \dfrac{e^x}{\sin y} + xy \end{pmatrix} \end{cases} \quad !$$

Lösung: Die erste Komponente $\ln(x^2+y^2)$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \frac{2y}{x^2+y^2}\,;$$

für die zweite Komponente $\dfrac{e^x}{\sin y} + xy$ erhalten wir entsprechend

$$\frac{ye^x}{\sin y} + y \quad \text{und} \quad \frac{-e^x \cos y}{\sin^2 y} + x\,.$$

Also ist
$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{ye^x}{\sin y} + y & \dfrac{-ye^x \cos y}{\sin^2 y} + x \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{e^x \cos y}{\sin^2 y} + x\,.$$