Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

30. Januar 2008

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ mit $x^2 + z^2 = 0$ ist ein Untervektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ mit $x^2 + z^2 = 0$ ist ein Untervektorraum.

3) *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^3 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist auch $A = E$.

4) Bestimmen Sie die Determinante der 4×4-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$!

5) Finden Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$, die den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ enthält!

6) Für welche $a \in \mathbb{C}$ sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^2$ linear abhängig?

7) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vierten Grades von $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x^2 - y^2)$ um den Nullpunkt!

8) Was ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte)*
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier in x, in denen kein Term mit x^2 vorkommt.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

b) Welche Dimension hat V ?

c) Zeigen Sie: $f \mapsto x^2 f'' - 6f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi: V \to V$.

d) Welche Dimensionen haben $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$?

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *a)*?

f) Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \qquad (1)\\ 2x + 3y + z &= 2 \qquad (2)\\ x + 3y - a^2 z &= -a \qquad (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z = 1/(a-1)$.

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

b) Hat $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$!

b) Ditto für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1-i \\ i \\ 3+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin 2x \cos 5y + e^{x^2+2y} \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) \\ \dfrac{e^x}{\sin y} + xy \end{pmatrix} \end{cases} !$$

$\mathcal{H\ I\ L\ F\ S\ M\ I\ T\ T\ E\ L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 30. Januar 2008, um 11^{15} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •