

1. Dezember 2007

Scheinklausur Höhere Mathematik II

Fragen: je zwei Punkte

- 1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^3 = i$!

Lösung: Eigentlich kann man ein solches z leicht erraten: Da $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ist und $(-z)^3 = -z^3$, ist $z = -i$ offensichtlich eine Lösung.

Systematischer Ansatz: Da $i = e^{\pi i/2}$ ist, haben wir als Lösungen die drei Zahlen $z_k = e^{\pi i/6 + 2k\pi i/3}$ für $k = 0, 1, 2$. Für $k = 2$ ist $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$, also $z_2 = e^{3\pi i/2} = -i$. ($k = 1$ und $k = 2$ führen auf kompliziertere Lösungen, z.B. ist $e^{\pi i/6} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.)

Andere Alternative: $(a + bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$ ist genau dann gleich i , wenn $a^3 - 3ab^2 = 0$ und $3a^2b - b^3 = 1$ ist. Die erste Gleichung besagt, daß $a(a^2 - 3b^2) = 0$ ist, also $a = 0$ oder $a = \pm\sqrt{3}b$. Für $a = 0$ wird die zweite Gleichung zu $-b^3 = 1$, d.h. $b = -1$. Somit ist $z = -i$ eine Lösung.

- 2) *Richtig oder falsch:* $f(z) = |z|^2$ ist eine holomorphe Funktion.

Lösung: *Falsch*, denn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt: $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v(x, y) \equiv 0$. Daher sind $u_x = 2x$ und $v_y \equiv 0$ verschieden.

- 3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Falsch*, denn sie hat nur den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit zwei, und der Eigenraum dazu wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 4) Welchen Bedingungen müssen $a, b \in \mathbb{C}$ genügen, damit die Matrix $A = \begin{pmatrix} i & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$ symmetrisch bzw. HERMITESch ist?

Lösung: A ist genau dann symmetrisch, wenn $a = b$ ist; sie kann nie HERMITESch sein, da die Diagonaleinträge einer HERMITESchen Matrix reell sind.

- 5) *Richtig oder falsch:* Für eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist auch e^A wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Lösung: *Richtig*, denn Summen und Produkte oberer Dreiecksmatrizen sind wieder obere Dreiecksmatrizen, also auch alle Potenzen und damit auch e^A .

- 6) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$?

Lösung: Das Produkt der drei Nullstellen ist $(-1)^3 \cdot 10 = -10$, ihre Summe ist -2 . Falls sie alle ganzzahlig sein sind, kommen nur Teiler von zehn in Frage, also $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ und ± 10 . Einsetzen zeigt, daß $f(1) = 0$, aber $f(-1) = 24$ ist. Auch $f(2) = 0$, und damit ist klar, daß die dritte Nullstelle -5 sein muß.

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = y^{4/5}$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Lösung: *Falsch*, denn $y(t) \equiv 0$ ist eine Lösung, und wenn wir die Veränderlichen trennen, erhalten wir via $\int_0^y \eta^{-4/5} d\eta = \int_0^t d\tau$ oder $5y^{1/5} = t$ die weitere Lösung $y(t) = \left(\frac{t}{5}\right)^5$.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

a) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{10x^n}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx$?

Lösung: Das Integral konvergiert, wenn der Zählergrad um mindestens zwei kleiner ist als der Nennergrad vier, also für $n = 0, 1$ und 2 .

b) Berechnen Sie das Integral für das größte solche n !

Lösung: Wir müssen also $n = 2$ setzen. Da keine der vier Nennernullstellen $\pm i$ und $-1 \pm i$ reell ist und der Zählergrad zwei um zwei kleiner ist als der Nennergrad vier, können wir das Integral auf dem Umweg über den Residuensatz ausrechnen: Sein Wert ist $2\pi i$ mal der Summe der Residuen des Integranden bei den Polen in der oberen Halbebene, also bei i und $-1 + i$. Beides sind Pole erster Ordnung, so daß die Residuen einfach als Limites berechnet werden können:

$$\text{Res}_{x=x_v} \frac{10x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \lim_{x \rightarrow x_v} (x - x_v) \frac{10x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \text{Res}_{x=i} \frac{10x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{(x-i) \cdot 10x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \lim_{x \rightarrow i} \frac{(x-i) \cdot 10x^2}{(x-i)(x+i)(x^2+2x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{10x^2}{(x+i)(x^2+2x+2)} = \frac{10i^2}{(i+i)(i^2+2i+2)} = \frac{-10}{2i \cdot (1+2i)} \\ &= \frac{5i}{1+2i} = \frac{5i \cdot (1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{10+5i}{5} = 2+i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Res}_{x=-1+i} \frac{10x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} &= \lim_{x \rightarrow -1+i} \frac{(x+1-i) \cdot 10x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+i} \frac{(x+1-i) \cdot 10x^2}{(x^2+1)(x+1-i)(x+1+i)} = \lim_{x \rightarrow -1+i} \frac{10x^2}{(x^2+1)(x+1+i)} \\ &= \frac{10 \cdot (-1+i)^2}{((-1+i)^2-1)((-1+i)+1+i)} = \frac{-20i}{(-2i+1) \cdot 2i} = \frac{-10}{1-2i} \\ &= \frac{-10+20i}{2^2+1^2} = -2-4i. \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx = 2\pi i((2+i) + (-2-4i)) = 2\pi i \cdot (-3i) = 6\pi.$$

Aufgabe 2: (12 Punkte)

a) Die FOURIER-Reihen der stückweise differenzierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien

$$S_f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t \quad \& \quad S_g(t) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} r_\ell \sin \ell\omega t.$$

Welche FOURIER-Reihe hat $\lambda f + \mu g$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$?

Lösung: Da alle FOURIER-Koeffizienten über Integrale berechnet werden, deren Integrand ein Vielfaches der darzustellenden Funktion ist, folgt aus der Linearität der Integrale sofort, daß sich entsprechende FOURIER-Koeffizienten einfach addieren, d.h.

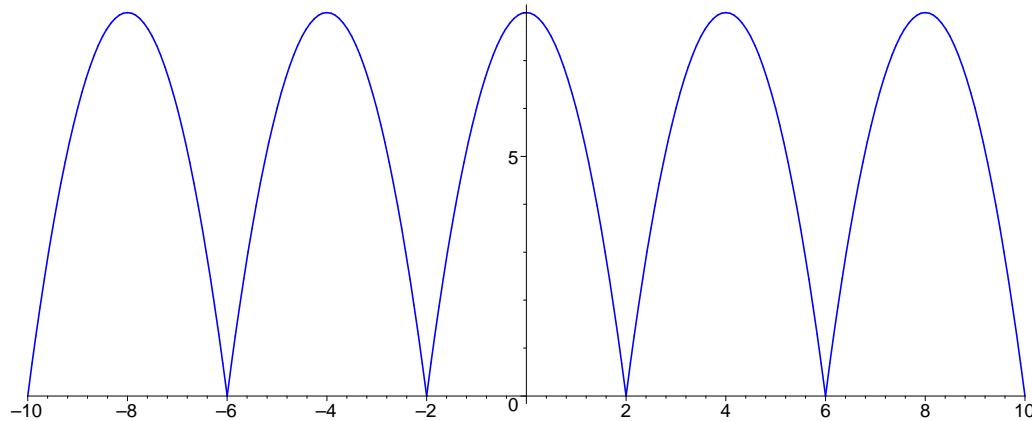
$$S_{\lambda f + \mu g} = (\lambda c_0 + \mu p_0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu q_k) \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} (\lambda b_{\ell} + \mu r_{\ell}) \sin \ell\omega t.$$

b) Was können Sie über die Periode von $\lambda f + \mu g$ sagen?

Lösung: $\lambda f + \mu g$ ist auf jeden Fall periodisch mit Periode $T_0 = 2\pi/\omega$, denn es ist ja eine Linearkombination solcher Funktionen. Die tatsächliche Periode könnte allerdings kleiner sein: Im Extremfall könnte sogar $\lambda f + \mu g = 0$ verschwinden und wäre dann periodisch mit jeder Periode T .

c) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Intervall $[-2, 2]$ gegeben durch $f(t) = 8 - 2t^2$; sie sei außerdem periodisch mit Periode vier. Skizzieren Sie diese Funktion im Intervall $[-10, 10]$!

Lösung:



d) Ist f gerade, ungerade oder keines von beidem?

Lösung: Da das Intervall $[-2, 2]$ symmetrisch zur Ordinate liegt und die Funktion dort gerade ist, ist sie auf ganz \mathbb{R} gerade.

e) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme. Der konstante Term ist

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (8 - 2t^2) dt = \frac{1}{4} \cdot \left(8t - \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{4} \left(32 - \frac{32}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

Wegen der Periode $T = 4$ ist $\omega = \frac{\pi}{2}$, und der Koeffizient von $\cos k\frac{\pi}{2}t$ ist

$$a_k = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 (8 - 2t^2) \cos k\frac{\pi}{2}t dt = 4 \int_{-2}^2 \cos k\frac{\pi}{2}t dt - \int_{-2}^2 t^2 \cos k\frac{\pi}{2}t dt.$$

Das erste Integral ist $\int_{-2}^2 \cos k\frac{\pi}{2}t dt = \frac{\sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}} \Big|_{-2}^2 = 0$, da der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet. Für das zweite Integral können wir die Formelsammlung am Ende der Klausur konsultieren; danach ist

$$\int_{-2}^2 t^2 \cos k\frac{\pi}{2}t dt = \frac{t^2 \sin k\frac{\pi}{2}t}{k\frac{\pi}{2}} + \frac{2t \cos k\frac{\pi}{2}t}{k^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{2 \sin k\frac{\pi}{2}t}{k^3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^3} \Big|_{-2}^2.$$

Da der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, fallen hier alle Sinusterme weg, und wegen $\cos(\pm k\pi) = (-1)^k$ bleibt nur

$$\left. \frac{4 \cdot 2t \cos k \frac{\pi}{2} t}{k^2 \pi^2} \right|_{-2}^2 = \frac{32 \cdot (-1)^k}{k^2 \pi^2} = \frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Somit ist $a_k = -\frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2}$ und $S_f(t) = \frac{16}{3} - \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k \frac{\pi}{2} t}{k^2}$.

f) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst, und wo tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Für alle Stellen t , an denen f stetig ist, konvergiert $S_f(t)$ gegen $f(t)$, d.h. also für alle $t \in \mathbb{R}$. Auch das GIBBS-Phänomen tritt nur an Sprungstellen auf, hier also nirgends.

g) Berechnen Sie die komplexe FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Da $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ ist, erhalten wir diese sofort als

$$S_f(t) = \frac{16}{3} - \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{k\pi i t/2}}{k^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-k\pi i t/2}}{k^2} = \frac{16}{3} - \frac{16}{\pi^2} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k e^{-k\pi i t/2}}{k^2}.$$

h) Welche Aussage liefert der Satz von PARSEVAL für die Funktion f ?

Lösung: Nach dem Satz von PARSEVAL ist die Summe der Betragsquadrate der komplexen FOURIER-Koeffizienten gleich dem Quadrat der L^2 -Norm von f . Hier ist

$$c_k = \begin{cases} \frac{16}{3} & \text{für } k = 0 \\ \frac{32}{\pi^2} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (8 - 2t^2)^2 dt = \int_{-2}^2 (4 - t^2)^2 dt = \int_{-2}^2 (t^4 - 8t^2 + 16) dt = \left. \frac{t^5}{5} - \frac{8t^3}{3} + 16t \right|_{-2}^2 \\ &= \frac{64}{5} - \frac{128}{3} + 64 = 64 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 \right) = 64 \cdot \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Somit ist $\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{16^2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{512}{15}$.

Die Zähler der Vorfaktoren sind allesamt Zweierpotenzen; kürzen wir durch $16^2 = 2^8$, erhalten wir die einfachere Formel $\frac{1}{9} + \frac{2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{2}{15}$.

i) Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$!

Lösung: Wenn wir die gerade bewiesene Formel nach dieser Summe auflösen, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{9} \right) = \frac{\pi^4}{8} \cdot \frac{4}{45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Für die zweite Formel müssen wir offenbar die FOURIER-Reihe selbst auswerten; an der Stelle $t = 0$ sind alle Kosinusterme gleich eins, d.h.

$$S_f(0) = \frac{16}{3} - \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = f(0) = 8 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{32} \left(8 - \frac{16}{3} \right) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \lfloor \sqrt{t} \rfloor & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet!

Lösung: Wir wissen, daß die Ableitung im Distributionensinn überall dort, wo die Funktion differenzierbar ist, mit der Ableitung selbst übereinstimmt, während jede Sprungstelle a einen Term $(f(a^+) - f(a^-)) \cdot \delta(t - a)$ liefert. Die hier betrachtete Funktion f verschwindet für $t \leq 0$ identisch, für $t \geq 0$ ist sie jeweils konstant gleich n für $n \leq t < n^2$; bei $t = n^2$ springt sie auf $n + 1$. Überall dort, wo die Funktion stetig ist, ist sie also konstant und hat somit die Nullfunktion als Ableitung; an den Sprungstellen haben wir jeweils einen Sprung um $+1$, was für die Ableitung im Distributionensinne einen Summanden $\delta(t - n^2)$ liefert. Damit ist $T_f(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n^2)$, und als „Funktion“ geschrieben ist die Ableitung $\dot{f}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - n^2)$.

Aufgabe 4: (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(-3 - \lambda) \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + 4 \cdot 2 \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2 - 9 + 8)((3 + \lambda)(1 + \lambda) + 1) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)^2. \end{aligned}$$

Somit haben wir die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins und $\lambda_3 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit zwei. Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheit brauchen wir die Dimension des Eigenraums; im Hinblick auf c) bis e) berechnen am besten gleich Basen aller drei Eigenräume.

Für $\lambda_1 = 1$ müssen wir dazu das homogene lineare Gleichungssystem mit der Matrix

$$A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

lösen. Die ersten beiden Zeilen sagen uns, daß die erste Komponente eines jeden Eigenvektors gleich dem Doppelten der zweiten sein muß; die dritte und die vierte Zeile sind linear unabhängig voneinander, so daß die dritte und die vierte Komponente verschwinden müssen.

Für $\lambda_2 = -1$ haben wir entsprechend die Matrix

$$A - \lambda_2 E = A + E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier sagen uns die ersten beiden Zeilen, daß erste und zweite Komponente der Eigenvektoren übereinstimmen müssen, und aus den beiden anderen folgt wieder, daß die weiteren Komponenten verschwinden.

Bleibt noch der dritte Eigenwert $\lambda_3 = -2$. Hier sind in

$$A - \lambda_3 E = A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

die ersten beiden Zeilen linear unabhängig und sagen uns, daß die ersten beiden Komponenten eines jeden Eigenvektors verschwinden müssen, während nach der dritten und vierten Zeile die dritte Komponente gleich der vierten sein muß.

Die drei Eigenräume werden somit aufgespannt von den drei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat auch $\vec{\lambda}_3 = -2$ nur die geometrische Vielfachheit eins.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein*; die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_3 = -2$ ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ ?

Lösung: Um eine Basis des \mathbb{R}^4 zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir zunächst noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu $\lambda_3 = -2$. Da in

$$(A + 2E)^2 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die ersten beiden Zeilen linear unabhängig sind, müssen die ersten beiden Komponenten jedes Hauptvektors verschwinden; ansonsten gibt es keine weiteren Bedingungen. Der einfachste von \vec{b}_3 linear unabhängige Vektor mit dieser Eigenschaft ist offensichtlich der vierte Einheitsvektor $\vec{b}_4 = {}^t(0 \ 0 \ 0 \ 1)$.

Damit hat A bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ Dreiecksgestalt. Um diese Dreiecksgestalt zu bestimmen, müssen wir noch nachrechnen, wohin der Hauptvektor zweiter Stufe \vec{b}_4 abgebildet wird. \vec{b}_4 ist der vierte Standardbasisvektors des \mathbb{R}^4 ; somit ist $A\vec{b}_4$ einfach der vierte Spaltenvektor von A . Wir müssen ihn darstellen in der Form $A\vec{b}_4 = -2\vec{b}_4 + c\vec{b}_3$, was offensichtlich genau für $c = 1$ der Fall ist. Die gesuchte Dreiecksgestalt ist daher

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und $e^{A t}$!

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix. Da nach der allgemeinen Theorie (und wie man auch trivialerweise sieht) $DN = ND$ ist, folgt $e^{\Delta t} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt)$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $e^{\Delta t} = Be^{\Delta t}B^{-1}$; wir brauchen also B^{-1} . Diese

Matrix läßt sich in der üblichen Weise via GAUSS schnell bestimmen: Wir schreiben die Einheitsmatrix daneben

$$\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

und subtrahieren dann ein halb mal die ersten Zeile von der zweiten sowie die dritte von der vierten:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Um die Nenner loszuwerden, multiplizieren wir am besten gleich die zweite Zeile mit zwei

$$\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

und subtrahieren sie dann von der ersten; außerdem subtrahieren wir die vierte Zeile von der dritten:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Nun müssen wir nur noch die erste Zeile durch zwei dividieren; dann steht rechts die inverse Matrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das elementare, aber unangenehme Ausmultiplizieren ergibt schließlich

$$e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -2e^t + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ e^t - e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2t)e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & te^{-2t} & (1 + t)e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

e) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit der An-

fangsbedingung $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$!

Falls Sie e) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“

$$e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{-t} & -2e^{3t} + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - t)e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & -4te^{-3t} & (2 + 2t)e^{-3t} \end{pmatrix} \text{ arbeiten.}$$

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie ist (mit der richtigen Matrix e^{At}) $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}(0)$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -2e^t + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ e^t - e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2t)e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & te^{-2t} & (1+t)e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ (1-t)e^{-3t} \\ -4te^{-3t} \end{pmatrix}.$$

f) Wie verhält sich diese Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Lösung: Da e^{-t} , e^{-t} und te^{-3t} allesamt gegen Null gehen, konvergieren alle Komponenten des Lösungsvektors gegen Null.

g) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingung?

Lösung: Nein; stört man die erste und/oder zweite Komponenten so, daß die beiden nicht mehr gleich sind, kommen Terme mit e^t ins Spiel, die dafür sorgen, daß diese beiden Komponenten gegen $\pm\infty$ gehen.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 100 \sin 3t!$$

Hinweis: $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x + 1)(x^2 + 4)$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4$, was nach dem Hinweis gleich $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4)$ ist. Die Nullstellen sind somit -1 und $\pm 2i$, die allgemeine Lösung also

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + C_3 e^{-t} \quad \text{mit } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist eine reine Schwingung mit Kreisfrequenz drei; man kann also hoffen, daß es auch eine spezielle Lösung dieser Bauart gibt. Um sie zu finden, machen wir einen Ansatz der Form $y(t) = a \cos 3t + b \sin 3t$. Dann ist

$$\dot{y}(t) = -3a \sin 3t + 3b \cos 3t, \quad \ddot{y}(t) = -9a \cos 3t - 9b \sin 3t, \quad y^{(3)}(t) = 27a \sin 3t - 27b \cos 3t.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$(-27b - 9a + 12b + 4a) \cos 3t + (27a - 9b - 12a + 4b) \sin 3t = 100 \sin 3t;$$

a und b erfüllen also das lineare Gleichungssystem

$$-5a - 15b = 0 \quad \text{und} \quad 15a - 5b = 100 \quad \implies \quad a = -3b \quad \text{und} \quad -50b = 100.$$

Somit ist $b = -2$ und $a = 6$. Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist also $y(t) = 6 \cos 3t - 2 \sin 3t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + C_3 e^{-t}$ mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - 2y(t) + 1 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t)(x(t) + y(t))!$$

Lösung: Für eine Gleichgewichtslösung sind $x(t) \equiv x$ und $y(t) \equiv y$ konstant; insbesondere verschwinden also ihre Ableitungen. Somit ist $x^2 - 2y + 1 = 0$ und $x(x + y) = 0$. Die zweite Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder $x = 0$ oder $x = -y$ ist. Im ersten Fall wird die zweite Gleichung zu $-2y + 1 = 0$, also $y = \frac{1}{2}$, im letzteren wird sie zu $y^2 - 2y + 1 = 0$, also $y = 1$ und damit $x = -1$. Somit gibt es genau zwei Gleichgewichtspunkte, nämlich $(0, \frac{1}{2})$ und $(-1, 1)$.

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ und den Anfangsgliedern $x_0 = 0, x_1 = 3!$

Lösung: Die charakteristische Gleichung von $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$ ist $\lambda^2 - \lambda - 2$; sie hat die Nullstellen $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$. Somit läßt sich jede Lösung in der Form $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot (-1)^n$ schreiben. Dabei ist $x_0 = a + b = 0$ und $x_1 = a - 2b = 3$, also $a = -1$ und $b = 1$. Mithin ist $x_n = 2^n - (-1)^n$.

Aufgabe 7: (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ auf $\mathbb{R}^2!$

Lösung: Der Gradient von f ist $\begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 3y^2 \end{pmatrix}$. Falls dieser verschwindet, muß also $y = -2x$ sein und

$$x + 3y^2 = x + 3 \cdot (2x)^2 = x + 12x^2 = x(1 + 12x) = 0.$$

Dies verschwindet für $x = 0$ und $x = -\frac{1}{12}$; die zugehörigen y -Werte sind $y = 0$ und $y = \frac{1}{6}$.

Die HESSE-Matrix $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$ ist für $(0, 0)$ die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit Determinante -1 ; sie ist also indefinit, so daß kein Extremum vorliegt.

Im Punkt $(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ wird sie zu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit Determinante eins; da der Eintrag links oben positiv ist, ist sie also positiv definit, und f hat dort ein relatives Minimum.

b) Welche Punkte kommen als Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + xy = 4$ in Frage?

Lösung: Der Gradient der Nebenbedingung ist $\begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix}$; da Punkte mit $x = 0$ die Nebenbedingung nicht erfüllen, muß in jedem Extremum der Gradient von f dazu proportional sein, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$2x + y = \lambda \cdot (2x + y) \quad \text{und} \quad x + 3y^2 = \lambda x.$$

Die erste Gleichung ist für $\lambda = 1$ stets erfüllt; in diesem Fall ist nach der zweiten Gleichung $y = 0$. Da auch die Nebenbedingung erfüllt sein muß, folgt $x = \pm 2$.

Für $\lambda \neq 1$ muß in der ersten Gleichung $2x + y = 0$ sein, also $y = -2x$.

Da $x^2 + xy = x^2 - 2x^2 = -x^2$ unmöglich gleich vier sein kann, erfüllt kein solcher Punkt die Nebenbedingung.

Somit sind die beiden Punkte $(\pm 2, 0)$ die einzigen Kandidaten; der Funktionswert ist in beiden gleich vier.