Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

1. Dezember 2007

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^3 = i$!

2) *Richtig oder falsch:* $f(z) = |z|^2$ ist eine holomorphe Funktion.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) Welchen Bedingungen müssen $a, b \in \mathbb{C}$ genügen, damit die Matrix $A = \begin{pmatrix} i & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$ symmetrisch *bzw.* Hermitesch ist?

5) *Richtig oder falsch:* Für eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist auch e^A wieder eine obere Dreiecksmatrix.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$?

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = y^{4/5}$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

a) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{10x^n}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx$?

b) Berechnen Sie das Integral für das größte solche n !

Aufgabe 2: (*12 Punkte*)

a) Die Fourier-Reihen der stückweise differenzierbaren Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien

$$S_f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t \quad \& \quad S_g(t) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} r_\ell \sin \ell\omega t\,.$$

Welche Fourier-Reihe hat $\lambda f + \mu g$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$?

b) Was können Sie über die Periode von $\lambda f + \mu g$ sagen?

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im Intervall $[-2, 2]$ gegeben durch $f(t) = 8 - 2t^2$; sie sei außerdem periodisch mit Periode vier. Skizzieren Sie diese Funktion im Intervall $[-10, 10]$!

d) Ist f gerade, ungerade oder keines von beidem?

e) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f !

f) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst, und wo tritt das Gibbs-Phänomen auf?

g) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe von f !

h) Welche Aussage liefert der Satz von Parseval für die Funktion f ?

i) Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$!

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ [\sqrt{t}] & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet!

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}!

e) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$!

Falls Sie e) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{-t} & -2e^{3t} + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-t)e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & -4te^{-3t} & (2+2t)e^{-3t} \end{pmatrix}$$ *arbeiten.*

f) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

g) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingung?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 100 \sin 3t\,!$$

Hinweis: $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2+4)$

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - 2y(t) + 1 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t)\big(x(t) + y(t)\big)\,!$$

Aufgabe 6: *(2 Punkte)*
Bestimmen Sie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ und den Anfangsgliedern $x_0 = 0, x_1 = 3$!

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ auf $\mathbb{R}^2$!

b) Welche Punkte kommen als Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + xy = 4$ in Frage?

Formelanhang

$$\int t^2 \sin \omega t \, dt = -\frac{t^2 \cos \omega t}{\omega} + \frac{2t \sin \omega t}{\omega^2} + \frac{2 \cos \omega t}{\omega^3} + C$$
$$\int t^2 \cos \omega t \, dt = \frac{t^2 \sin \omega t}{\omega} + \frac{2t \cos \omega t}{\omega^2} - \frac{2 \sin \omega t}{\omega^3} + C$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 1. Dezember 2007, um 13^{00} Uhr