WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15. November 2007

a) Formulieren Sie das Anfangswertproblem $\dot y(t) = ty(t)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung und berechnen Sie, ausgehend von $y_0(t) = 1$, mindestens die ersten drei Iterationen zur Bestimmung des Fixpunkts! Erraten Sie auf Grund dieser Näherungslösungen den Fixpunkt und weisen Sie nach, daß Sie richtig geraten haben!

b) Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 2t \cdot \big(y(t) - 2\big)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung, und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie anhand dieser die Lösungsfunktion, und bestätigen Sie dies durch Einsetzen!

c) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$$\dot y(t) + 2ty(t) = 4t \quad (1) \qquad \dot y(t) + \tfrac{y(t)}{t} + e^t = 0 \quad (2)$$

$$\dot y(t) = a + bt + cy(t) \quad (3) \qquad (1+t)\dot y(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0 \quad (4)$$

$$\dot y(t) + y(t) = 2\sin t \quad (5) \qquad \dot y(t) + \sin t\, y(t) = \sin^3 t \quad (6)$$

d) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\dot y(t) = \cos y(t),\ y(0) = 0 \quad (1) \qquad 2\dot y(t)y(t) = 1,\quad y(0) = 0 \quad (2)$$

$$\dot y(t) = \tfrac{5}{3} y(t)^{\frac{2}{5}},\ y(0) = 0 \quad (3) \qquad \dot y(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8},\ y(0) = 1 \quad (4)$$

$$\dot y(t)^2 = 4y(t),\quad y(0) = 0 \quad (5) \qquad \dot y(t) = \frac{1}{y(t)},\quad y(0) = 1 \quad (6)$$

e) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen, und überlegen Sie sich, wo t liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \quad (1) \qquad \dot y(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \quad (2) \qquad \dot y(t) = e^{t+y(t)} \quad (3)$$

$$\dot y(t) = t^2 y(t)^2 \quad (4) \qquad \dot y(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \quad (5) \qquad \dot y(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} \quad (6)$$

Hinweis zu (6)*:* $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

f) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \quad \text{mit } y(0) = 3 \text{ und mit } y(0) = -3 \quad (1)$$

$$\dot y(t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 y(t) \quad \text{mit } y(0) = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\dot y(t) = 1 + y(t)^2 \quad \text{mit } y(0) = 0 \text{ und mit } y(0) = 1 \quad (3)$$

$$y(t)\,\dot y(t) + \big(1 + y(t)^2\big)\sin t = 0 \quad \text{mit } y(0) = 1 \quad (4)$$

g) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot N(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a > 0$ und $b > 1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

h) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

i) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?

j) Finden Sie eine Differentialgleichung mit den Hyperbeln $y^2 - t^2 = C$ als Lösungskurven!

k) *Ditto* für die Lemniskaten $(y^2 + t^2)^2 = 2C^2(t^2 - y^2)$! *(Hier kann man viel kürzen!)*

l) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?