Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Beispielaufgaben anstelle der Übung am 1. November 2007

Die Lösungen sind diese Woche bereits jetzt im Netz zu finden; Sie sollten aber trotzdem versuchen, zumindest einen Teil der Aufgaben zunächst selbst zu lösen.

a) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} !$$

Lösung: Das charakteristische Polynom berechnet sich, z.B. nach der Sarrusschen Regel, zu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 2 - 2 + (2-\lambda)\cdot 2 + 3\cdot(1-\lambda) + (2+\lambda)\cdot 2 \\ &= (\lambda^2-4)(1-\lambda) - 6 - 2 + 4 - 2\lambda + 3 - 3\lambda + 4 + 2\lambda \\ &= (-\lambda^3+\lambda^2+4\lambda-4) + (3-3\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 = -(\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1)\,. \end{aligned}$$

Nach dem Wurzelsatz von Viète ist also das Produkt der drei Nullstellen gleich -1, und ihre Summe $+1$.

Einsetzen zeigt, daß die beiden ganzzahligen Teiler ± 1 des konstanten Koeffizienten Nullstellen sind; da ihr Produkt -1 und ihre Summe null ist, ist die dritte Nullstelle $+1$. Wir haben also die einfache Nullstelle -1 und die doppelte Nullstelle $+1$.

Für $\lambda = -1$ ist

$$A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Hier ist die erste Spalte gleich der dritten und die zweite linear unabhängig davon; der Lösungsraum ist somit eindimensional und wird aufgespannt von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für $\lambda = +1$ ist

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

jetzt stimmen die ersten beiden Spalten überein, während die dritte linear unabhängig davon ist. Daher ist auch hier der Eigenraum nur eindimensional; er wird aufgespannt von

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Da der Eigenwert $+1$ trotz algebraischer Vielfachheit zwei nur geometrische Vielfachheit eins hat, gibt es keine Basis aus Eigenvektoren, aber es gibt einen Hauptvektoren zweiter Stufe zum Eigenwert eins. Zu deren Bestimmung müssen wir

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen; wir sehen sofort, daß diese Matrix alle Vektoren annuliert, deren erste beide Komponenten sich zu Null ergänzen. Hauptvektoren zweiter Stufe sind diejenigen unter diesen Vektoren, die keine Eigenvektoren sind, deren dritte Komponenten also nicht verschwindet. Die einfachste Wahl für einen zweiten Basisvektor des Hauptraums ist daher

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) n sei eine natürliche Zahl. Was ist A^n für die gerade betrachtete Matrix?

Lösung: Bezeichnet

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix mit Spalten $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, so ist $\Delta = B^{-1}AB$ eine obere Dreiecksmatrix, die wir aber glücklicherweise nicht so berechnen müssen: Da $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ Eigenvektoren sind, wissen wir, daß in den ersten beiden Spalten nur die Diagonaleinträge von null verschieden sein können; dort stehen die Eigenwerte -1 und 1.

$\vec{v}_3$ allerdings ist kein Eigenvektor, sondern nur Hauptvektor; wegen der Invarianz der Haupträume liegt $A\vec{v}_3$ zwar wieder im Hauptraum, ist aber kein Vielfaches von $\vec{v}_3$. Nachrechnen zeigt, daß

$$A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

ist; somit hat die dritte Spalte der Matrix Δ, die die Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ beschreibt, zweiten und dritten Eintrag eins, d.h.

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da D und N miteinander kommutieren, können wir den binomischen Lehrsatz anwenden und erhalten $\Delta^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i} N^i$ mit

$$D^m = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N^i = 0 \text{ für } i \geq 2.$$

Somit ist

$$\Delta^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\Delta = B^{-1}AB$ ist $A = B\Delta B^{-1}$ und daher auch $A^n = B\Delta^n B^{-1}$.

Der für die Matrix B ziemlich einfache GAUSS-Algorithmus zeigt, daß

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, also folgt für gerades n

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & -n & -n \\ n & 1+n & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und für ungerades n

$$A^n = \begin{pmatrix} -1-n & -2-n & -n \\ n & 1+n & n \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Was ist e^{At} ?

Lösung: $e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1}$; dabei ist $e^{\Delta t} = e^{Dt}e^{Nt}$ und $e^{Nt} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}N^i t^i = E + Nt$, da wir aus der vorigen Aufgabe wissen, daß alle Potenzen N^i mit $i \geq 2$ verschwinden. Somit ist e^{At} die Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}(E+Nt) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix},$$

d.h. $$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} - te^t & e^{-t} - (1+t)e^t & -te^t \\ te^t & (1+t)e^t & te^t \\ e^t - e^{-t} & e^t - e^{-t} & e^t \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 3x(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= 2x(t) + 2y(t) + z(t)\,! \end{aligned}$$

Lösung: Das sind gerade die Funktionenvektoren

$$e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(e^{-t} - te^t) + y_0\big(e^{-t} - (1+t)e^t\big) - z_0te^t \\ x_0te^t + y_0(1+t)e^t + z_0te^t \\ x_0(e^t - e^{-t}) + y_0(e^t - e^{-t}) + z_0e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(e^{-t} - te^t) + y_0\big(e^{-t} - (1+t)e^t\big) - z_0te^t \\ &= -(x_0 + y_0 + z_0) - y_0e^t + (x_0 + y_0)e^{-t}, \\ y(t) &= x_0te^t + y_0(1+t)e^t + z_0te^t = (x_0 + y_0 + z_0)te^t + y_0e^t \quad \text{und} \\ z(t) &= x_0(e^t - e^{-t}) + y_0(e^t - e^{-t}) + z_0e^t = (x_0 + y_0 + z_0)e^t - (x_0 + y_0)e^{-t}. \end{aligned}$$

e) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = z(0) = 1$ und $y(0) = 0$!

Lösung: Hier ist $x_0 = z_0 = 1$ und $y_0 = 0$, also

$$x(t) = e^{-t} - 2te^t, \qquad y(t) = 2te^t \quad \text{und} \quad z(t) = 2e^t - e^{-t}.$$

f) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(3) = z(3) = 1$ und $y(3) = 0$!

Lösung: Die Funktionen $x(3+t), y(3+t), z(3+t)$ erfüllen das Anfangswertproblem der vorigen Aufgabe, d.h wir müssen die dortigen Lösungsfunktionen an der Stelle $t-3$ auswerten und erhalten

$$x(t) = e^{3-t} - 2(t-3)e^{t-2}, \qquad y(t) = 2(t-3)e^{t-3} \quad \text{und} \quad z(t) = 2e^{t-3} - e^{3-t}\,.$$

g) Welche Lösungen des Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \to \infty$?

Lösung: Genau die, bei denen die Koeffizienten vor te^t und vor e^t verschwinden, d.h. $x_0 + y_0 + z_0$ und y_0 müssen verschwinden, was gleichbedeutend ist mit $x_0 = -z_0$ und $y_0 = 0$.

h) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix};$$

wir entwickeln nach der zweiten Zeile: (Entwicklung nach der dritten Spalte wäre genauso einfach gewesen.)

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)^2\,. \end{aligned}$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda = \pm 1$, die jeweils algebraische Vielfachheit eins haben.

Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheiten müssen wir die Dimensionen der Eigenräume berechnen: Die erste Zeile der Matrix

$$A + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zeigt, daß die zweite Komponente jedes Eigenvektors verschwinden muß; wegen der vierten Zeile gilt damit das Gleiche auch für die vierte. Alsdann zeigt die dritte Zeile, daß die erste und die dritte Komponente gleich sein müssen; der Eigenraum wird also aufgespannt von

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Matrix

$$A - E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sieht man sofort an, daß

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor ist. Die zweite (oder vierte) Zeile der Matrix zeigt, daß für jeden Eigenvektor die zweite Komponente verschwinden muß; aus der ersten und der dritten Zeile folgt damit das Verschwinden der ersten und der vierten Komponente. Also wird der Eigenraum von $\vec{b}_3$ aufgespannt.

Somit haben beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit eins.

i) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

Lösung: Da beide Eigenwerte um eins kleinere geometrische als algebraische Vielfachheit haben, müssen wir jeweils noch einen Hauptvektor der Stufe zwei berechnen. Für $\lambda = -1$ ist

$$(A - \lambda E)^2 = (A + E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix annuliert natürlich den Eigenvektor $\vec{b}_1$; einen davon linear unabhängigen Hauptvektor erhalten wir, wenn wir die erste und die dritte Komponente der Lösung willkürlich auf null setzen: Dann müssen die zweite und die vierte Komponente gleich sein; wir erhalten also den Vektor

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als zweiten Basisvektor des Hauptraums zum Eigenwert -1.

Für $\lambda = 1$ ist

$$(A - \lambda E)^2 = (A - E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

die davon annullierten Vektoren haben beliebige dritte und vierte Komponente, aber die erste und die zweite Komponente müssen verschwinden. Der einfachste von $\vec{b}_3$ linear unabhängige Vektor mit dieser Eigenschaft ist

$$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

und damit haben wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ des $\mathbb{R}^4$ aus Eigen- und Hauptvektoren gefunden.

j) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

Lösung: Wir müssen zunächst die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ bestimmen. Da in den Spalten dieser Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, brauchen wir also die Vektoren $A\vec{b}_i$, was im Falle der beiden

Eigenvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_3$ kein Problem ist: Die werden einfach mit dem zugehörigen Eigenwert ± 1 multipliziert. Für $\vec{b}_2$ müssen wir rechnen:

$$A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0, & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 \,.$$

Für $\vec{b}_4$ müssen wir ebenfalls das Produkt $A\vec{b}_4$ berechnen; da $\vec{b}_4$ der vierte Standardbasisvektor ist, erhalten wir einfach die vierte Spalte der Matrix, d.h.

$$A\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}_3 + \vec{b}_4 \,.$$

Somit ist die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis gleich

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Diagonalmatrix D und der zweite Summand N offensichtlich kommutieren. Also ist

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies muß nun noch zurücktransformiert werden auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$; die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zur neuen Basis enthält die Vektoren $\vec{b}_i$ als Spalten, ist also

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dazu berechnet man entweder nach GAUSS, oder aber, indem man die Vektoren $\vec{e}_i$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ in der neuen Basis hinschreibt: Da

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \quad \vec{b}_3 = \vec{e}_3 \quad \text{und} \quad \vec{b}_4 = \vec{e}_4$$

ist, folgt

$$\vec{e}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3, \quad \vec{e}_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_4, \quad \vec{e}_3 = \vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \vec{e}_4 = \vec{b}_4\,,$$

d.h. die Matrix des Basiswechsels von der neuen Basis zur Standardbasis ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und Ausmultiplizieren führt auf

$$e^{At} = Be^{Mt}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t} - e^{t} & t(e^{-1} - e^{t}) & e^{t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} - e^{t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

k) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot w(t) = x(t) - w(t), \quad \dot x(t) = -x(t), \quad \dot y(t) = y(t) + z(t) - 2w(t), \quad \dot z(t) = z(t) - x(t)$$

mit $w(0) = x(0) = y(0) = z(0) = 1$!

Lösung: Dies ist ein System homogener linearer Differentialgleichungen mit Matrix A; die gesuchte Lösung ist also

$$e^{At}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ e^{-t}-e^{t} & t(e^{-1}-e^{t}) & e^{t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t}-e^{t} & 0 & e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+t)e^{-t}\\ e^{-t}\\ (1+t)e^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}.$$

l) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da auch $\lim\limits_{t\to\infty}(1+t)e^{-t}$ verschwindet, geht sie gegen null.

m) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein, denn A hat auch den Eigenwert $+1$. Stört man die Anfangsbedingungen auch nur leicht in Richtung des zugehörigen Eigenvektors oder eines der entsprechenden Hauptvektoren, kommen Terme mit e^t und te^t ins Spiel, die Lösungsfunktionen gehen also betragsmäßig gegen unendlich statt gegen null.

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ habe unter anderem die Eigenwerte ± 1 mit algebraischer Vielfachheit eins, $2+3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3+5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei; die geometrische Vielfachheit sei jeweils eins.

n) Was ist $\det A$?

Lösung: Da A eine reelle Matrix ist, hat auch das charakteristische Polynom von A reelle Koeffizienten; nichtreelle Nullstellen können also nur als Paare konjugiert komplexer Zahlen auftreten. Damit ist zu jedem Eigenwert λ auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert derselben algebraischen Vielfachheit. Also gibt es außer den angegebenen Eigenwerten auch noch die Eigenwerte $2-3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3-5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei. Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der damit bekannten Eigenwerte ist $1+1+2\cdot 2+2\cdot 3 = 12$, also kennen wir alle Eigenwerte.
Die Determinante einer Matrix hängt nicht von der Basis ab; da wir die Matrix bezüglich einer geeigneten (komplexen) Basis auf Dreiecksgestalt bringen können mit den Eigenwerten entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit in der Diagonalen, ist somit

$$\begin{aligned}\det A &= 1\cdot(-1)\cdot(2+3i)^2\cdot(2-3i)^2\cdot(-3+5i)^2\cdot(-3-5i)^2\\ &= 1\cdot(-1)\,|2+3i|^4\cdot|-3+5i|^6\\ &= -\left(2^2+3^2\right)^2\cdot\left(3^2+5^2\right)^3 = -13^2\cdot 34^3 = -6642376\,.\end{aligned}$$

o) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec y}(t) = A\vec y(t)$?

Lösung: Die Eigenwerte ± 1 sorgen dafür, daß es Lösungen gibt, die direkt ins Unendliche *bzw.* zum Nullpunkt gehen. Die Eigenwerte $2\pm 3i$ führen zu Lösungen, die spiralförmig ins Unendliche gehen und $-3 \pm 5i$ für solche, die sich spiralförmig auf den Nullpunkt zusammenziehen. Dazu kommen noch alle Arten von Lösungen, die zwei oder mehrere dieser Verhaltensweise bezüglich verschiedener Dimensionen kombinieren, also beispielsweise Lösungen, die spiralförmig auf eine Achse zulaufen, entlang dieser aber ins Unendliche (oder zum Nullpunkt) gehen und so weiter. Da es, mit Vielfachheiten gezählt, vier Eigenwerte mit negativem Realteil gibt, liegen alle Lösungen langfristig in der Umgebung eines fünfdimensionalen Teilraums von $\mathbb{R}^{12}$.

p) Welche dieser Möglichkeiten wird am häufigsten zu beobachten sein?

Lösung: Falls nicht gerade alle Koeffizienten der Exponentialfunktionen mit positivem Realteil im Exponenten verschwinden, geht die Lösung ins Unendliche, wobei im Allgemeinen sowohl Achsen existieren, auf denen die entsprechenden Lösungskomponenten direkt nach Unendlich gehen, als auch Ebenen, in denen dies spiralförmig geschieht.