WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Beispielaufgaben anstelle der Übung am 1. November 2007

Die Lösungen sind diese Woche bereits jetzt im Netz zu finden;
Sie sollten aber trotzdem versuchen, zumindest einen Teil der Aufgaben zunächst selbst zu lösen.

a) Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\,!$$

b) n sei eine natürliche Zahl. Was ist A^n für die gerade betrachtete Matrix?

c) Was ist e^{At} ?

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 3x(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= 2x(t) + 2y(t) + z(t)\,! \end{aligned}$$

e) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = z(0) = 1$ und $y(0) = 0$!

f) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(3) = z(3) = 1$ und $y(3) = 0$!

g) Welche Lösungen des Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \to \infty$?

h) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

i) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A !

j) Berechnen Sie die Matrix e^{At} !

k) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{w}(t) = x(t) - w(t), \quad \dot{x}(t) = -x(t), \quad \dot{y}(t) = y(t) + z(t) - 2w(t), \quad \dot{z}(t) = z(t) - x(t)$$

mit $w(0) = x(0) = y(0) = z(0) = 1$!

l) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

m) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ habe unter anderem die Eigenwerte ± 1 mit algebraischer Vielfachheit eins, $2 + 3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3 + 5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei; die geometrische Vielfachheit sei jeweils eins.

n) Was ist $\det A$?

o) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$?

p) Welche dieser Möglichkeiten wird am häufigsten zu beobachten sein?