WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515 A5, ZIMMER C201

# Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25. Oktober 2007

*a)* Zeigen Sie: Zu vorgegebenen reellen Zahlen $a, b$ gibt es genau zwei komplexe Zahlen $x, y$ derart, daß $x + y = a$ und $xy = b$ ist.

**Lösung:** $x$ und $y$ genügen der quadratischen Gleichung

$$(Z - x)(Z - y) = Z^2 - (x + y)Z + xy = Z^2 - aZ + b = 0\,;$$

da diese (mit Vielfachheit gezählt) genau zwei Lösungen hat, sind das $x$ und $y$.

*b)* Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 15 = 0$!

**Lösung:** Die Summe der beiden Lösungen ist 2, ihr Produkt $-15$. Offensichtlich haben 3 und $-5$ diese Eigenschaft; nach der vorigen Aufgabe sind das also *die* Lösungen.

*c)* Lösen Sie die kubische Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$!

**Lösung:** Das Produkt der Lösungen ist $-4$ und ihre Summe ist drei. *Falls* alle ganzzahlig sind, kommen nur $\pm 1$ und $\pm 2$ in Frage. Wegen

$$1 - 3 + 4 \neq 0 \quad \text{aber} \quad -1 - 3 + 4 = 0$$

ist eins keine Nullstelle, dafür aber $-1$. Das Produkt der beiden restlichen Nullstellen ist genau wie ihre Summe gleich vier, also haben wir zusätzlich noch die doppelte Nullstelle zwei.

*d)* Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$!

**Lösung:** Das Produkt der vier Nullstellen ist sechs; *falls* sie allesamt ganzzahlig sind, kommen also nur $\pm 1, \pm 2$ und $\pm 3$ in Frage. Einsetzen zeigt, daß $\pm 1$ Nullstellen sind:

$$1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0 \quad \text{und} \quad 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0\,.$$

Das Produkt der beiden restlichen Nullstellen ist dann also gleich $-6$ und ihre Summe ist gleich der Summe aller vier Nullstellen, also eins. Dies ist nur möglich, wenn sie es sich um $-2$ und 3 handelt.

*e)* Welche Nullstellen hat $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$ ?

**Lösung:** Das Produkt aller vier Nullstellen ist zwei; *falls* sie alle ganzzahlig sind, kommen also nur $\pm 1$ und $\pm 2$ in Frage. Da alle Koeffizienten positiv sind, kann es allerdings keine positive Nullstelle geben; Kandidaten sind also nur $-1$ und $-2$. Beides sind tatsächlich Nullstellen, denn

$$1 - 5 + 9 - 7 + 2 = 0 \quad \text{und} \quad 16 - 40 + 36 - 14 + 2 = 0\,.$$

Das Produkt der beiden restlichen Nullstellen muß eins sein und ihre Summe muß zusammen mit $-1$ und $-2$ den negativen Koeffizienten von $x^3$ ergeben, also $-5$. Damit ist ihre Summe gleich $-2$, d.h. beide sind $-1$. Somit ist $-1$ eine dreifache Nullstelle und $-2$ eine einfache.

*f)* Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!

**Lösung:** Das charakteristische Polynom

$$\det(C - \lambda E) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

hat die beiden Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Eigenvektoren $\binom{x}{y}$ zum Eigenwert Null erfüllen das Gleichungssystem

$$x + iy = 0 \quad \text{und} \quad -ix + y = 0\,,$$

dessen beide Gleichungen natürlich äquivalent sind. (Sonst wäre Null kein Eigenwert.) Der Eigenraum wird aufgespannt beispielsweise von $\binom{1}{i}$.

Die Matrix $C - 2E = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ führt auf das Gleichungssystem

$$-x + iy = 0 \quad \text{und} \quad -ix - y = 0\,,$$

hier wird der Eigenraum also aufgespannt von $\binom{i}{1}$.

*g)* Gibt es eine Basis von $\mathbb{C}^2$ aus *reellen* Eigenvektoren von $C$ ?

**Lösung:** *Nein;* da keines der beiden obigen Gleichungssysteme eine nichttriviale reelle Lösung hat, gibt es überhaupt keinen reellen Eigenvektor.

*h)* Was ist $e^C$ *bzw.* $e^{Ct}$ ?

**Lösung:** Bezüglich der Basis aus $\binom{1}{i}$ und $\binom{i}{1}$ hat die Multiplikation mit $C$ die Abbildungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Da $C = BDB^{-1}$ ist, wobei $B$ die Matrix mit den beiden Eigenvektoren als Spalten ist, gilt auch $e^{Ct} = Be^{Dt}B^{-1}$. Zur Berechnung von $B^{-1}$ gehen wir in der üblichen Weise nach GAUSS vor: In der um die Einheitsmatrix erweiterten Matrix

$$\begin{matrix} 1 & i & \quad & 1 & 0 \\ i & 1 & \quad & 0 & 1 \end{matrix}$$

subtrahieren wir das i-fache der ersten Zeile von der zweiten:

$$\begin{matrix} 1 & i & \quad & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \quad & -i & 1 \end{matrix}$$

Sodann dividieren wir diese durch zwei

$$\begin{matrix} 1 & i & \quad & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \quad & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

und subtrahieren sie von der ersten:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \quad & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 & \quad & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Da jetzt vorne die Einheitsmatrix steht, ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und

$$e^{Ct} = Be^{Dt}B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+1 & i(e^{2t}-1) \\ i(1-e^{2t}) & 1+e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $t = 1$ liefert

$$e^{C} = Be^{D}B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2}+1 & i(e^{2}-1) \\ i(1-e^{2}) & 1+e^{2} \end{pmatrix}.$$

*i)* Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}$!

**Lösung:** Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $A^2 = -E$, also $A^3 = -A$, $A^4 = E$, $A^5 = A$, und ab dann wiederholt sich alles zyklisch. Insbesondere hat also $A^n$ für gerades $n$ nur auf der Diagonalen nichtverschwindende Einträge und für ungerades $n$ nur auf der Nebendiagonalen. Somit ist

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i t^i = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} & \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} t^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!} & \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

*Alternativ* kann man $e^{At}$ auch durch Diagonalisieren berechnen: Das charakteristische Polynom von $A$ ist $\lambda^2 + 1$, hat also die Nullstellen $\pm i$.

$$A \mp iE = \begin{pmatrix} \mp i & -1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix}$$

führt auf dieselben linearen Gleichungssysteme, die wir aus *a)* kennen, d.h. $\binom{1}{i}$ ist Eigenvektor zu $-i$ und $\binom{i}{1}$ zu $i$. Wir können also mit derselben Matrix $B$ arbeiten wie dort, haben aber jetzt die Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ mit $e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}$. Dies führt auf

$$e^{At} = Be^{Dt}B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

*j)* Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$!

**Lösung:** Da die zweite Spalte das negative und die dritte das doppelte der ersten Spalte ist, sieht man sofort, daß null ein (mindestens) doppelter Eigenwert sein muß; zwei linear unabhängige Eigenvektoren dazu sind z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den restlichen Eigenwert bleibt uns nicht anderes übrig, als doch das charakteristische Polynom zu berechnen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2-\lambda & -4 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(8-\lambda) - 16\big) + 2(\lambda - 8 + 8) + 4(4 - 4 + 2\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 10\lambda + 2\lambda + 8\lambda = -\lambda^3 + 11\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 11). \end{aligned}$$

Der dritte Eigenwert ist also elf, und jeder zugehörige Eigenvektor löst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10 & -1 & 2 \\ -2 & -9 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Addiert man $(-5)$-mal die zweite Zeile zur ersten und zweimal die zweite zur dritten, erhält man die beiden äquivalenten Gleichungen

$$44y + 22z = 0 \quad \text{und} \quad -22y - 11z = 0\,,$$

die beide aussagen, daß $z = -2y$ ist. Setzt man dies ein in beispielsweise die zweite Gleich ung, folgt, daß $-2x - y = 0$ oder $y = -2x$ ist. Die Lösungen sind daher allesamt Vielfache des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

der somit den Eigenraum aufspannt.

*k)* Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die einzelnen Eigenwerte?

**Lösung:** Das charakteristische Polynom $-\lambda^2(\lambda - 11)$ hat null als doppelte und elf als einfache Nullstelle, also hat der Eigenwert $\lambda = 0$ die algebraische Vielfachheit zwei, und $\lambda = 11$ hat algebraische Vielfachheit eins. Da wir zur Null zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden haben, sind das auch die geometrischen Vielfachheiten.

*l)* Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $\big(x(t), y(t)\big)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 5y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) + y(t)\,!$$

**Lösung:** Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ des Systems hat das charakteristische Polynom

$$(-3-\lambda)(1-\lambda) + 5 \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda+1)^2 - 9\,,$$

die Eigenwerte sind also $-1 \pm 3$, d.h. 2 und $-4$.
Die Eigenvektoren $\binom{x}{y}$ zum Eigenwert zwei erfüllen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

der Eigenraum wird also aufgespannt vom Vektor $\vec{b}_1 = \binom{1}{1}$.
Die Eigenvektoren $\binom{x}{y}$ zum Eigenwert -4 erfüllen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hier wird der Eigenraum wird also aufgespannt vom Vektor $\vec{b}_2 = \binom{5}{-1}$.
Damit bilden $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ eine Basis aus Eigenvektoren, bezüglich derer $A$ die Diagonalgestalt $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ hat. Anwendung der Exponentialfunktion auf $Dt$ ergibt

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Genauer ist $D = B^{-1}AB$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, also ist $A = BDB^{-1}$ und $e^{At} = Be^{Dt}B^{-1}$.

Die Matrix $B^{-1}$ kann nach GAUSS berechnet werden, indem wir in der üblichen Weise eine Einheitsmatrix daneben schreiben und durch Zeilenumformungen versuchen, links eine Einheitsmatrix zu bekommen.

In

$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

subtrahieren wir zunächst die erste Zeile von der zweiten:

$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

Sodann wird $\frac{5}{6}$ mal die zweite Zeile zur ersten addiert:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

Schließlich muß noch die zweite Zeile durch $(-6)$ dividiert werden:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{matrix}$$

Somit ist

$$B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{2t}+5e^{-4t} & 5e^{2t}-5e^{-4t} \\ e^{2t}-e^{-4t} & 5e^{2t}+e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$ ist somit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{2t}+5e^{-4t} & 5e^{2t}-5e^{-4t} \\ e^{2t}-e^{-4t} & 5e^{2t}+e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (x_0+5y_0)e^{2t}+5(x_0-y_0)e^{-4t} \\ (x_0+5y_0)e^{2t}+(y_0-x_0)e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Da uns nur die allgemeine Lösung unabhängig von Anfangsbedingungen interessiert, empfiehlt es sich, die neuen Parameter $a = \frac{1}{6}(x_0+5y_0)$ und $b = \frac{1}{6}(x_0-y_0)$ einzuführen; damit erhalten wir die kompaktere Darstellung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t}+5be^{-4t} \\ ae^{2t}-be^{-4t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

d.h. $x(t) = ae^{2t} + 5be^{-4t}$ und $y(t) = ae^{2t} - be^{-4t}$ mit beliebigen Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

*m)* Welche Lösung hat das entsprechende Anfangswertproblem mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$ ?

**Lösung:** Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{2t}+5e^{-4t} & 5e^{2t}-5e^{-4t} \\ e^{2t}-e^{-4t} & 5e^{2t}+e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4e^{2t}+10e^{-4t} \\ -4e^{2t}-2e^{-4t} \end{pmatrix},$$

d.h. $x(t) = -\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{5}{3}e^{-4t}$ und $y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$.

*n)* Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ${}^tAA$ symmetrisch.

**Lösung:** ${}^t({}^tAA) = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tAA$.

*o)* Mit welchen komplexen Zahlen $a, b, c$ wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine HERMITEsche Matrix?

**Lösung:** Bezeichnen wir die gegebene Matrix mit $M$, so ist

$$ {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & b & 1-2i \\ 1+i & 2 & c \\ a & 3-i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{{}^tM} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{b} & 1+2i \\ 1-i & 2 & \overline{c} \\ \overline{a} & 3+i & 3 \end{pmatrix} . $$

Letzteres ist genau dann gleich $M$, wenn $a = 1 + 2i$, $b = 1 - i$ und $c = 3 + i$ ist.

*p)* Welche der folgenden Matrizen $A_n$ sind symmetrisch, welche HERMITEsch? Von welchen wissen Sie, daß $\mathbb{R}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren von $A_n$ hat?

$$ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix}, $$

$$ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} $$

**Lösung:** $A_1$ ist symmetrisch und HERMITEsch, $A_2$ und $A_3$ sind symmetrisch, aber nicht HERMITEsch, $A_4$ ist HERMITEsch, aber nicht symmetrisch, $A_5$ weder symmetrisch noch HERMITEsch, da die Diagonaleinträge einer HERMITEschen Matrix reell sein mssen. $A_6$ ist aus demselben Grund symmetrisch, aber nicht HERMITEsch.

Nach dem Satz aus der Vorlesung gibt es daher zu $A_1$ und $A_4$ Basen aus Eigenvektoren. Bei $A_6$ sind offensichtlich bereits die Vektoren der Standardbasis Eigenvektoren, und wenn man genau hinsieht, ist $A_3 = iA_1$, also gibt es auch zu $A_3$ eine Basis aus Eigenvektoren, nämlich die zu $A_1$. Bei den beiden verbleibenden Matrizen ist die Frage nicht einfach ohne Rechnung entscheidbar; mit Rechnung folgt, daß es solche Basen gibt. (Danach war aber nicht gefragt.)