

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25. Oktober 2007

- a) Zeigen Sie: Zu vorgegebenen reellen Zahlen a, b gibt es genau zwei komplexe Zahlen x, y derart, daß $x + y = a$ und $xy = b$ ist.
- b) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 15 = 0!$
- c) Lösen Sie die kubische Gleichung $x^3 - 3x^2 + 4 = 0!$
- d) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6!$
- e) Welche Nullstellen hat $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2?$
- f) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}!$
- g) Gibt es eine Basis von \mathbb{C}^2 aus *reellen* Eigenvektoren von $C?$
- h) Was ist e^C bzw. e^{Ct} ?

i) Berechnen Sie $e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}}!$

j) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}!$

- k) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die einzelnen Eigenwerte?
- l) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung $(x(t), y(t))$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 5y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) + y(t)!$$

- m) Welche Lösung hat das entsprechende Anfangswertproblem mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1?$
- n) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist tAA symmetrisch.

o) Mit welchen komplexen Zahlen a, b, c wird $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & a \\ b & 2 & 3-i \\ 1-2i & c & 3 \end{pmatrix}$ eine HERMITESCHE Matrix?

- p) Welche der folgenden Matrizen A_n sind symmetrisch, welche HERMITESCH? Von welchen wissen Sie, daß \mathbb{R}^4 eine Basis aus Eigenvektoren von A_n hat?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i & 4i \\ 2i & 3i & 4i & 5i \\ 3i & 4i & 5i & 6i \\ 4i & 5i & 6i & 7i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} i & i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -i & i & i & i \\ -i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$