

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. Oktober 2007

- a) Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t) dt! \quad \text{Ist} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t) dt?$$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t) dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\varphi(t)}{a} dt = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(t) dt$$

läßt sich nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung auch schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t) dt = \frac{\frac{a}{2} - (-\frac{a}{2})}{a} \varphi(\tau) = \varphi(\tau)$$

für ein geeignetes $\tau \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$; für $a \rightarrow 0$ geht $\tau \rightarrow 0$, also der Wert des Integrals gegen $\varphi(0)$. Genau das ist auch der Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t) dt.$$

- b) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt! \quad \text{Ist} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt?$$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} f(t) dt + \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^0 f(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} dt - \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^0 dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

unabhängig von a . Damit verschwindet auch der Limes für $a \rightarrow 0$.

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt$ mit einem unstetigen f würden die meisten Mathematiker nicht für sinnvoll halten; Ingenieure haben weniger Hemmungen und schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0) = 1,$$

was offensichtlich nicht gleich dem Limes der linken Seite ist. Gelegentlich definiert man das Integral auch als Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Limes von $f(t)$ für $t \rightarrow 0$; mit dieser Interpretation stimmt die Formel.

- c) Berechnen Sie für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:
 $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \sin^2 t$, $f_3(t) = 5t + 7$, $f_4(t) = e^t$

Lösung:

$$(f_1 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t-s)g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-s) ds = \cos(t-\pi) - \cos(t+\pi) = 0$$

$$(f_2 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(t-s)g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t-s) ds$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(t-s) \cos(t-s) - (t-s)) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (-(t-\pi) + (t+\pi)) = \pi$$

$$(f_3 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (5(t-s) + 7)g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} (5(t-s) + 7) ds = 10\pi t + 14\pi$$

$$(f_4 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-s}g(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} e^{t-s} ds = e^{t+\pi} - e^{t-\pi} = e^t(e^\pi - e^{-\pi})$$

Die ersten beiden Werte hätte man auch ohne Rechnung bekommen: Faltung mit g integriert eine Funktion über das Intervall der Länge 2π mit dem betrachteten Wert als Mittelpunkt. Für den Sinus ist dieses Intervall ein volles Periodenintervall, das Integral also Null. Wird $f_2(t) = \sin^2 t$ über ein Intervall der Länge 2π integriert, hat man zwei volle Perionen; das Integral hat offensichtlich denselben Wert wie das über \cos^2 . Da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist, ist die Summe der beiden Werte 2π , jeder einzelne also π .

- d) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})) * \sin t$ und $(\delta(t) + \delta(t - \pi)) * \sin t$!

Lösung:

$$(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})) * \sin t = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t-s) + \delta(t - \frac{\pi}{2} - s)) \sin s ds = \sin t + \sin(t - \frac{\pi}{2}) = \sin t - \cos t$$

$$(\delta(t) + \delta(t - \pi)) * \sin t = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t-s) + \delta(t - \pi - s)) \sin s ds = \sin t + \sin(t - \pi) = 0$$

- e) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

Lösung: $f(\omega)$ ist die FOURIER-Transformierte von $g(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$; da g quadratintegrierbar ist, ist es nach dem Satz von PARSEVAL auch f .

- f) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

Lösung: Wieder nach PARSEVAL ist mit obigen Bezeichnungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \|f\|_2^2 = 2\pi \|g\|_2^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt = \pi.$$

- g) Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und einer Konstanten $\Omega > 0$ eine Funktion g mit der Eigenschaft, daß $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)$ ist für $|\omega| \leq \Omega$ und $\hat{g}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$!

Lösung: $h(\omega)$ sei der Rechteckimpuls mit der Eigenschaft, daß $h(\omega) = 1$ ist für $|\omega| \leq \Omega$ und $h(\omega) = 0$ sonst. Dann soll also gelten $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot h(\omega)$. Also ist die FOURIER-Transformierte der gesuchten Funktion das Produkt der FOURIER-Transformierten von f und \check{h} , d.h. $g = f * \check{h}$ ist die Faltung von f mit \check{h} . Dabei ist

$$\check{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\Omega t} - e^{i\Omega t}}{it} = -\frac{\sin \Omega t}{\pi t}.$$

- h) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta\left(t - \left(\frac{2N+1}{2} - k\right)d\right)$!

Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \sum_{k=0}^{2N+1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \left(\frac{2N+1}{2} - k\right)d\right) dt = \sum_{k=0}^{2N+1} e^{i\omega\left(\frac{2N+1}{2} - k\right)d} = e^{i\omega\frac{2N+1}{2}d} \sum_{k=0}^{2N+1} e^{-i\omega kd} \\ &= e^{i\omega\frac{2N+1}{2}d} \sum_{k=0}^{2N+1} (e^{-i\omega d})^k = e^{i\omega\frac{2N+1}{2}d} \frac{1 - e^{-i\omega d(2N+2)}}{1 - e^{-i\omega d}} = \frac{e^{i\omega(N+1)d} (1 - e^{-i\omega d(2N+2)})}{e^{i\omega\frac{d}{2}} (1 - e^{-i\omega d})} \\ &= \frac{e^{i\omega(N+1)d} - e^{-i\omega(N+1)d}}{e^{i\omega\frac{d}{2}} - e^{-i\omega\frac{d}{2}}} = \frac{\sin(N+1)\omega d}{\sin\omega\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

- i) Sei nun $a < \frac{d}{2}$ eine Konstante und $g(t) = 1$, falls es eine eine ganze Zahl $0 \leq k \leq 2N+1$ gibt, so daß $\left|t - \left(\frac{2N+1}{2} - k\right)d\right| \leq \frac{a}{2}$ ist; ansonsten sei $g(t) = 0$. Berechnen Sie auch die FOURIER-Transformierte von g !

Lösung: g ist die Faltung der gerade betrachteten Funktion f mit einem Rechteckimpuls der Breite a , also ist $\hat{g}(\omega)$ das Produkt von $\hat{f}(\omega)$ mit dessen FOURIER-Transformierter

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega t} dt = -\frac{e^{-i\omega a/2} - e^{-\omega a/2}}{i\omega} = 2 \frac{\sin\omega\frac{a}{2}}{\omega},$$

d.h.

$$\hat{g}(\omega) = 2 \frac{\sin(N+1)\omega d}{\sin\omega\frac{d}{2}} \cdot \frac{\sin\omega\frac{a}{2}}{\omega}.$$

- j) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma \cdot (w(t) - \beta)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

Lösung: Man kann natürlich ausmultiplizieren und die allgemeine Formel aus der Vorlesung anwenden; einfacher ist es aber, die Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ zu betrachten. Diese hat dieselbe Ableitung wie $w(t)$, genügt also der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit Lösung} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}.$$

Also ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Integrationskonstante C so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist, d.h. $C = 1 - \beta$.

- k) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1 \text{ Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

Lösung: In diesem Fall ist C gleich 90% und $w(t) = 0,1 + 0,9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0,1 + 0,9e^{-\gamma} = 0,6 \implies e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \implies \gamma = -\ln \frac{5}{9} \approx 0,5877866648.$$

Mithin ist $w(\frac{1}{2}) = 0,1 + 0,9e^{\frac{1}{2} \ln \frac{5}{9}} = 0,1 + 0,9e^{\ln \sqrt{\frac{5}{9}}} = 0,1 + 0,9\sqrt{\frac{5}{9}} \approx 0,7708203933$ ungefähr 77% . Er hat also bis zum Wiederholungstermin etwa 23% des Stoffs vergessen.

Alternativ, ohne Berechnung von γ : $w(\frac{1}{2}) = 0,1 + 0,9e^{-\gamma/2} = 0,1 + 0,9\sqrt{e^{-\gamma}} = 0,1 + 0,9\sqrt{\frac{5}{9}}$.

- l) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von 40 m^3 , dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

Lösung: Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinstmöglichen Zeiteinheit von $1/16$ Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.

Der Seminarraum enthält $V = 40 \text{ m}^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil zur (in Minuten gemessenen) Zeit t gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden

$$30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$$

Liter Luft eingeatmet; da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$ des Gesamtvolumens. Vorher war die Sauerstoffmenge $y(t)V$; nachher ist sie

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$\dot{y}(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000} t}.$$

Die Integrationskonstante ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5} e^{-\frac{12 \cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5} e^{-\frac{108}{1000}} \approx 0,1795255193.$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

- m) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

Lösung: Da $y(t)$ stetig differenzierbar ist, ist $\dot{y}(t)$ stetig, muß also entweder konstant gleich eins oder konstant gleich minus eins sein. Damit gibt es die beiden Lösungsklassen $y(t) = \pm t + C$; die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ erfüllen

$$y(t) = t - 1 \quad \text{und} \quad y(t) = -t + 1.$$