Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. Oktober 2007

a) Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,! \qquad \text{Ist} \quad \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,?$$

b) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \ge 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,! \qquad \text{Ist} \quad \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,?$$

c) Berechnen Sie für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:
$f_1(t) = \sin t, \qquad f_2(t) = \sin^2 t, \qquad f_3(t) = 5t + 7, \qquad f_4(t) = e^t$

d) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $\big(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})\big) * \sin t$ und $\big(\delta(t) + \delta(t - \pi)\big) * \sin t\,!$

e) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

f) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt\,?$

g) Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und einer Konstanten $\Omega > 0$ eine Funktion g mit der Eigenschaft, daß $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ ist für $|\omega| \le \Omega$ und $\widehat{g}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega\,!$

h) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{2N+1} \delta\Big(t - \big(\frac{2N+1}{2} - k\big)\,d\Big)\,!$

i) Sei nun $a < \frac{d}{2}$ eine Konstante und $g(t) = 1$, falls es eine eine ganze Zahl $0 \le k \le 2N+1$ gibt, so daß $\left|t - \big(\frac{2N+1}{2} - k\big)\,d\right| \le \frac{a}{2}$ ist; ansonsten sei $g(t) = 0$. Berechnen Sie auch die Fourier-Transformierte von $g\,!$

j) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen Hermann Ebbinghaus (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)\,!$

k) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

l) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,m^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

m) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot{y}(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?