

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11. Oktober 2007

a) Welche der folgenden Funktionen liegen in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ?

$$\begin{aligned} f(t) &= t, & g(t) &= \frac{1}{t}, & h(t) &= \frac{1}{1+t^2}, & j(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \\ k(t) &= e^{-t}, & \ell(t) &= e^{-t^2}, & m(t) &= e^{-t} \sin t, & n(t) &= e^{-|t|} \cos t \end{aligned}$$

**Lösung:** Das Integral über  $|f(t)|^2 = t^2$  divergiert an den Grenzen, das über  $|g(t)|^2 = 1/t^2$  an der Stelle  $t = 0$ . Die Integrale für  $h$  und  $j$  haben jeweils das Integral über  $1/(1+t^2)$  als konvergente Majorante, konvergieren also.

Das Integral über  $|k(t)|^2 = e^{-2t}$  divergiert an der unteren Grenze;  $\ell(t) = e^{-t^2}$  liegt im SCHWARTZ-Raum, also erst recht in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

$m(t)$  liegt aus dem gleichen Grund wie  $k(t)$  nicht in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , dafür aber  $n(t) = e^{-|t|} \cos t$ , denn aus der Vorlesung ist bekannt, daß  $e^{-|t|} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , und die  $L^2$ -Norm von  $e^{-|t|}$  ist eine konvergente Majorante für die von  $n(t)$ .

b) Berechnen Sie die  $L^2$ -Normen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & g(t) &= e^{-t^2}, & h(t) &= e^{-(1+t)^2}, & j(t) &= \frac{1}{1+|t|} \\ k(t) &= \frac{1}{1+|t|}, & \ell(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{falls } n - \frac{1}{2n} < t < n + \frac{1}{2n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi \\ \|g\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2} dt = \int_{s=2t}^{\infty} e^{-s^2/2} \frac{ds}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \|h\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(1+t)^2} dt = \int_{s=t+1}^{\infty} e^{-2s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \|j\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+|t|)^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{-1}{1+t} \Big|_0^{\infty} = 1 \\ \|k\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+|t|)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|n|)^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2} = -1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 1 \\ \|\ell\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2n}}^{n+\frac{1}{2n}} \frac{dt}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

also ist

$$\|f\|_2 = \sqrt{\pi}, \quad \|g\|_2 = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, \quad \|h\|_2 = \|j\|_2 = 1, \quad \|k\|_2 = \sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 1} \quad \text{und} \quad \|l\|_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}\pi.$$

c) Welche  $L^2$ -Normen haben die FOURIER-Transformierten dieser Funktionen?

**Lösung:** Allgemein ist nach der PLANCHEREL-Formel  $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ ; damit lassen sich alle  $L^2$ -Normen der FOURIER-Transformierten leicht aus den gerade berechneten  $L^2$ -Normen der Funktionen selbst bestimmen.

d) Berechnen Sie die  $L^2$ -Norm der Funktion  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ !

**Lösung:**  $\frac{\sin \omega}{\omega}$  ist die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses

$$R(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } \|R\|_2^2 = \int_{-1}^1 \frac{dt}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{also ist } \|\hat{f}\|_2 = \|\hat{R}\|_2 = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

e) Welche der folgenden Abbildungen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  sind Distributionen?

$$\begin{aligned} T_1(\varphi) &= 3\varphi(2) - 2\varphi(3), & T_2(\varphi) &= \varphi(2)^3 - \varphi(3)^2, & T_3(\varphi) &= 3\ddot{\varphi}(2) - 2\dot{\varphi}(3), \\ T_4(\varphi) &= e^{\varphi(0)}, & T_5(\varphi) &= \int_0^1 \varphi(t) dt, & T_6(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt, \\ T_7(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!}, & T_8(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(1)^n}{n!}, & T_9(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ddot{\varphi}(n)}{n!} \end{aligned}$$

**Lösung:**  $T_1 = 3\Delta_2 - 2\Delta_3$  ist eine,  $T_2$  ist nicht linear,  $T_3$  ist linear und stetig (wegen des starken Konvergenzbegriffs in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , der auch Ableitungen einschließt), also Distribution.  $T_4$  ist nicht linear,  $T_5$  und  $T_6$  sind Distributionen wegen der Stetigkeit von Integralen als Funktionen eines Parameters,  $T_7$  und  $T_9$  sind Distributionen, weil die Reihen jeweils Exponentialreihen als absolut konvergente Majoranten haben. (Im SCHWARTZ-Raum ist sowohl  $\varphi$  als auch  $\ddot{\varphi}$  beschränkt.)  $T_8$  ist nicht linear.

f) Für  $i \leq 6$  definieren die obigen Vorschriften auch Abbildungen  $T_i: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Für welche davon gibt es Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  mit  $T_i = \tilde{T}_f$ ?

**Lösung:** Nicht zu  $T_1$  und  $T_3$ , weil diese Abbildungen nicht beschränkt sind; nicht zu  $T_2$  und  $T_4$ , weil diese Abbildungen nicht linear sind. Für  $T_5$  ist  $f$  einfach ein Rechteckimpuls, der genau auf  $[0, 1]$  gleich eins ist, für  $T_6$  bietet sich  $f \equiv 1$  an, aber das liegt nicht in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , und in der Tat ist  $T_6$  nicht beschränkt.

g) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Distributionen

$$T_1: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(1) + \varphi(-1)) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_2: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \frac{1}{2}(\varphi(i) + \varphi(-i)) \end{cases},$$

und schreiben Sie diese, sofern möglich, in der Form  $T_f$  mit Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ !

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\widehat{T}_1(\varphi) &= T_1(\widehat{\varphi}) = \frac{1}{2}(\widehat{\varphi}(1) + \widehat{\varphi}(-1)) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{it} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-it} dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos t dt = T_{\cos}(\varphi).\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widehat{T}_2(\varphi) &= T_2(\widehat{\varphi}) = \frac{1}{2}(\widehat{\varphi}(i) + \widehat{\varphi}(-i)) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^t dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cosh t dt = T_{\cosh}(\varphi).\end{aligned}$$

Allerdings liegen weder  $\cos t$  und  $\cosh t$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

*h)*  $f(t) \equiv a$  mit  $a \in \mathbb{C}$  sei eine konstante Funktion. Was ist  $\widehat{T}_f$ ? Existiert  $\widehat{f}(\omega)$ ?

$$\text{Lösung: } \widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} a \widehat{\varphi}(\omega) d\omega = a \widetilde{\varphi}(1) = a \varphi(1).$$

Damit ist  $\widehat{T}_f = a \Delta_0$  ein Vielfaches der DIRAC-Distribution und  $\widehat{f}(\omega) = a \delta(\omega)$ .

*i)* Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom  $f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}$ . Was ist die FOURIER-Transformation von  $f$  im Distributionensinn? Können Sie diese durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\widehat{T}_f(\varphi) &= T_f(\widehat{\varphi}) = \sum_{k=-N}^N c_k \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t) e^{k \cdot i \omega t} dt = \sum_{k=-N}^N c_k \cdot 2\pi \widetilde{\varphi}(k\omega) = 2\pi \sum_{k=-N}^N c_k \varphi(k\omega) \\ &= 2\pi \sum_{k=-N}^N c_k \Delta_{k\omega}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( 2\pi \sum_{k=-N}^N c_k \delta(t - k\omega) \right) \varphi(t) dt\end{aligned}$$

*j)* *ditto* für  $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^N \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^N \sin \ell\omega t$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}f(t) &= 1 + \sum_{k=1}^N (\cos k\omega t + \sin k\omega t) = 1 + \sum_{k=1}^N \left( \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^N \frac{1-i}{2} e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{1+i}{2} e^{-ik\omega t}.\end{aligned}$$

Damit ist alles zurückgeführt auf die vorige Frage.

*k)* *ditto* für  $f(t) = t$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\hat{T}_f(\varphi) &= T_f(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} t \hat{\varphi}(t) dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t) dt = -2\pi i \check{\varphi}(0) = -2\pi i \dot{\varphi}(0) \\ &= 2\pi i \Delta_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \delta(t) \varphi(t) dt.\end{aligned}$$

- l) Berechnen Sie für  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  die Ableitung im Distributionensinn! Lässt sie sich durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\dot{T}_f(\varphi) &= -T_f(\dot{\varphi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n}^{2n+1} \dot{\varphi}(t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi(2n) - \varphi(2n+1)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \varphi(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \Delta_m(\varphi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(t-m) \right) \varphi(t) dt\end{aligned}$$

- m) *ditto* für  $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\dot{T}_f(\varphi) &= -T_f(\dot{\varphi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\varphi}(t) dt = \varphi(-\pi) - \varphi(\pi) \\ &= \Delta_{-\pi}(\varphi) - \Delta_{\pi}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)) \varphi(t) dt\end{aligned}$$