WOLFGANG K. SEILER

Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. September 2007

a) Werten Sie die FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$ aus an der Stelle $t = \frac{T}{4}$ und berechnen Sie den numerischen Wert der entstehenden Summe!

b) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\sqrt{\ell}}$?

c) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{\sqrt{2k+1}}$?

d) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$ konvergiert, und finden Sie eine obere Schranke für ihren Grenzwert! (*Hinweis:* Die Reihe $S_f(t) = i\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}$ ist aus dem Skriptum bekannt als FOURIER-Reihe einer Funktion mit Periode 2π, die zwischen $-\pi$ und π gleich dem Sinus hyperbolicus ist.)

e) Finden Sie obere Schranken für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$!

f) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $0 \le t < 1$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

g) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $-\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

h) $s(t)$ sei der Sägezahn aus der Vorlesung, d.h. die FOURIER-Reihe von s ist $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$. Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von $s * s$!

i) Geben Sie $s * s$ explizit als Funktion an, indem Sie die Formel

$$s * f(t) = F(t) + \frac{t}{T}\big(F(0) - F(T)\big) - \frac{F(0) + F(T)}{2} + F(T) - \frac{1}{T}\int_0^T F(\tau)\, d\tau$$

aus der Vorlesung anwenden! (F ist eine Stammfunktion von f.)

j) Zeigen Sie: $\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t\right) * \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} p_\ell \sin \ell\omega t\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k \cos k\omega t\,!$

k) Was ist $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t\right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\omega t\right)$?

l) *Richtig oder falsch:* Für zwei Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f * (g + h) = f * g + f * h$.

m) *Richtig oder falsch:* Für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f * \frac{1}{f} = 1$.

n) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe von $f(t) = |t|$ für $|t| < \pi$ und $f(\pi) = 0$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π, zeigt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen.

o) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe von $f(t) = |t|$ für $0 \le t < 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π, zeigt bei der Konvergenz das GIBBS-Phänomen.

p) f sei periodisch mit Periode 2π, und für $-\pi \le t < \pi$ sei $f(t) = t$. Wohin konvergiert die FOURIER-Reihe von f für $t = \pi$?

q) Die Kippschwingung $f(t)$ sei periodisch mit Periode 10, und für $0 \le t < 10$ sei $f(t) = e^{-t}$. Wohin konvergiert die FOURIER-Reihe von f für $t = 0$?

r) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(t) = |\sin t|$ ist linear unabhängig von den Funktionen $1, \cos kt, \sin \ell t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$.