Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. September 2007

a) Berechnen Sie, soweit möglich, die folgenden Integrale über den Residuensatz:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5\,dx}{x^2+100}\,, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10x\,dx}{x^2+100}\,, \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{20\,dx}{x^2-100}\,,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\,, \qquad I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}$$

Lösung: Um zu sehen, ob der Residuensatz anwendbar ist, müssen wir jeweils nachprüfen, ob *erstens* der Nennergrad des Integranden um mindestens zwei größer ist als der Zählergrad und *zweitens* daß der Nenner keine reellen Nullstellen hat. Die erste Bedingung ist offensichtlich bei I_2 verletzt, die zweite bei I_3. Bei den anderen Integralen gibt es keine Probleme, denn $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ hat die (nichtreellen) Nullstellen $-2\pm i$. Also können wir I_1, I_4 und I_5 über den Residuensatz berechnen.

Im Falle von I_1 sind die Nennernullstellen $\pm 10i$; in der oberen Halbebene liegt nur $10i$. Somit ist $I_1 = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=10i} 5/(z^2=100)$, und da $z^2+100=(z+10i)(z-10i)$ nur einfache Nullstellen hat ist

$$\operatorname{Res}_{z=10i}\frac{5}{z^2+100} = \lim_{z\to 10i}\frac{5(z-10i)}{z^2-100} = \lim_{z\to 10i}\frac{5(z-10i)}{(z+10i)(z-10i)} = \lim_{z\to 10i}\frac{5}{z+10i}$$
$$= \frac{5}{10i+10i} = \frac{1}{4i}\,.$$

Somit ist $I_1 = 2\pi i\cdot(1/4i) = \pi/2$.

Die Nenner der Integranden von I_4 und I_5 haben beide die Nullstellen $\pm i$ und $-2\pm i$; in der oberen Halbebene liegen i und $-2+i$. Wir müssen also die Residuen der Integranden an diesen beiden Stellen berechnen. Analog zum gerade betrachteten Beispiel nutzen wir aus, daß

$$z^2+1=(z+1)(z-1) \quad\text{und}\quad z^2+4z+5=\big(z-(-2+i)\big)\big(z-(-2-i)\big)$$

ist, woraus insbesondere auch wieder folgt, daß alle Polstellen einfach sind. Daher ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=i}\frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to i}\frac{16z(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\\
&= \lim_{z\to i}\frac{16z}{(z+i)(z^2+4z+5)} = \frac{16i}{2i\cdot(-1+4i+5)}\\
&= \frac{8}{4+4i} = \frac{2}{1+i} = 1-i \qquad \text{und}\\
\operatorname{Res}_{z=-2+i}\frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to -2+i}\frac{16z(z+2-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\\
&= \lim_{z\to -2+i}\frac{16z}{(z^2+1)(z+2+i)} = \frac{16\cdot(-2+i)}{(4-4i)\cdot 2i}\\
&= \frac{16\cdot(-2+i)}{8+8i} = \frac{-4+2i}{1+i} = \frac{(-4+2i)(1-i)}{2}\\
&= -1+3i\,.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i}\frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} + \operatorname{Res}_{z=-2+i}\frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\right)\\
&= 2\pi i\big((1-i)+(-1+3i)\big) = 2\pi i\cdot 2i = -4\pi\,.
\end{aligned}$$

Die Rechnung für I_5 geht ganz entsprechend:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=i}\frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to i}\frac{16z^2(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\\
&= \lim_{z\to i}\frac{16z^2}{(z+i)(z^2+4z+5)} = \frac{-16}{2i\cdot(-1+4i+5)}\\
&= \frac{8i}{4+4i} = \frac{2i}{1+i} = 1+i \qquad \text{und}\\
\operatorname{Res}_{z=-2+i}\frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to -2+i}\frac{16z^2(z+2-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\\
&= \lim_{z\to -2+i}\frac{16z^2}{(z^2+1)(z+2+i)} = \frac{16\cdot(-2+i)^2}{(4-4i)\cdot 2i}\\
&= \frac{16\cdot(3-4i)}{8+8i} = \frac{2\cdot(3-4i)}{1+i} = \frac{2\cdot(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\
&= \frac{2\cdot(-1-7i)}{2} = -1-7i\,.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
I_5 &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i}\frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} + \operatorname{Res}_{z=-2+i}\frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\right)\\
&= 2\pi i\big((1+i)+(-1-7i)\big) = 2\pi i\cdot(-6i) = 12\pi\,.
\end{aligned}$$

b) *Richtig oder falsch:* Die Summe zweier trigonometrischer Polynome ist wieder ein trigonometrisches Polynom.

Lösung: Offensichtlich *richtig,* denn durch Addition zweier Elemente kommt man nicht aus dem Vektorraum $P_T(\mathbb{R})$ *bzw.* $P_T(\mathbb{C})$ heraus.

c) *Richtig oder falsch:* Das Produkt zweier trigonometrischer Polynome $f, g \in P_T(\mathbb{C})$ ist wieder ein trigonometrisches Polynom.

Lösung: *Richtig,* denn das Produkt ist eine Linearkombination von Termen der Form $e^{k\cdot i\omega t}\cdot e^{\ell\cdot i\omega t} = e^{(k+\ell)\cdot i\omega t}$.

d) *Richtig oder falsch:* Das Produkt zweier trigonometrischer Polynome $f, g \in P_T(\mathbb{R})$ ist wieder ein trigonometrisches Polynom.

Lösung: Weniger offensichtlich, aber trotzdem *richtig:* Entweder argumentiert man, daß f, g erst recht in $P_T(\mathbb{C})$ liegen, also – wie gerade gezeigt – auch ihr Produkt, das als reelle Funktion somit in $P_T(\mathbb{C}) \cap L_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ liegt, was laut Vorlesung gleich $P_T(\mathbb{R})$ ist, oder man multipliziert aus, erhält fg als Linearkombination von Termen der Form $\cos k\omega t\cdot\cos\ell\omega t$, $\cos k\omega t\cdot\sin\ell\omega t$ und $\sin k\omega t\cdot\sin\ell\omega t$, die man durch Ausmultiplizieren und neu Zusammenfassen ihrer komplexen Darstellung als Linearkombinationen von $\cos(k\pm\ell)\omega t$ und $\sin(k\pm\ell)\omega t$ darstellen kann.

e) *Richtig oder falsch:* Jedes trigonometrische Polynom hat eine Stammfunktion, die selbst ein trigonometrisches Polynom ist.

Lösung: *Falsch:* Von Null verschiedene konstante Funktionen sind zwar periodisch zu jeder Periode T, ihre Stammfunktionen sind aber linear, also streng monoton wachsend oder fallend, so daß sie auf keinen Fall periodisch sein können.

f) Bestimmen Sie die reellen und die komplexen FOURIER-Reihen der folgenden Funktionen:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad g(t) = 2 + \cos^3 t \quad \text{und} \quad h(t) = \frac{1 - e^{iNt}}{1 - e^{it}} \quad (N \in \mathbb{N})\,!$$

Lösung: Falls man die Additionsformel für den Sinus kennt, kann man diese für die reelle FOURIER-Reihe von f direkt anwenden:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin t \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos t \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bigl(\cos t + \sin t\bigr)\,,$$

denn da $\frac{\pi}{4}$ im Gradmaß dem Winkel 45° entspricht und ein rechtwinkliges Dreieck mit einem 45°-Winkel gleichschenklig ist, folgt $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, was wegen PYTHAGORAS gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sein muß. Die komplexe FOURIER-Reihe entsteht daraus über die EULERschen Formeln:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\bigl(\cos t + \sin t\bigr) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\Bigl(\bigl(e^{it} + e^{-it}\bigr) - i\bigl(e^{it} - e^{-it}\bigr)\Bigr) = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{4}e^{it} + \frac{\sqrt{2}(1+i)}{4}e^{-it}\,. \end{aligned}$$

Man kann natürlich auch direkt mit den EULERschen Formeln argumentieren und zunächst die komplexe FOURIER-Reihe berechnen:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i(t+\frac{\pi}{4})} - e^{-i(t+\frac{\pi}{4})}}{2i} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2i}e^{it} - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2i}e^{-it}\,.$$

Da $e^{\pm\frac{\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ ist, führt dies auf dasselbe Ergebnis.
Um von der komplexen FOURIER-Reihe zur reellen zu kommen, muß man entweder alle komplexen Exponentialfunktionen via $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ auflösen oder, was meist schneller geht, Exponentialfunktionen mit entgegengesetzt gleichen Exponenten und gleichen oder entgegengesetzt gleichen Koeffizienten zu trigonometrischen Funktionen zusammenfassen:

$$\frac{\sqrt{2}(1-i)}{4}e^{it} + \frac{\sqrt{2}(1+i)}{4}e^{-it} = \frac{\sqrt{2}}{4}\bigl(e^{it} + e^{-it}\bigr) - \frac{\sqrt{2}\,i}{4}\bigl(e^{it} - e^{-it}\bigr) = \frac{\sqrt{2}}{2}\bigl(\cos t + \sin t\bigr)\,.$$

$g(t) = 2 + \cos^3 t$ kann grundsätzlich auch mit trigonometrischen Formeln direkt als reelle FOURIER-Reihe geschrieben werden, allerdings geht es hier um eine eher weniger bekannte Formel, so daß wohl die meisten lieber gleich die binomische Formel anwenden und komplex rechnen:

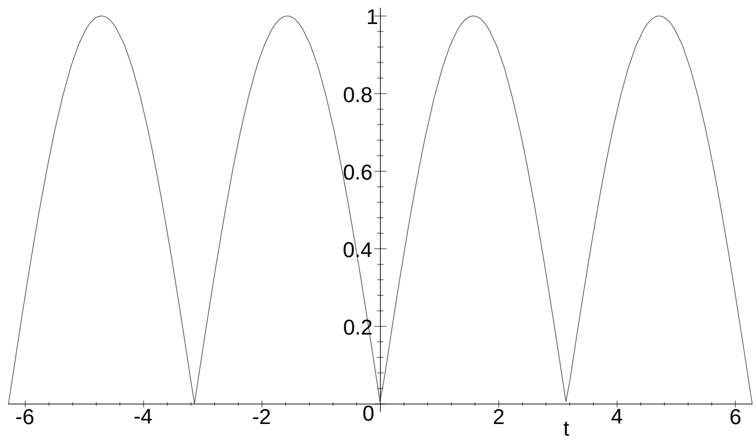
$$\begin{aligned} g(t) &= 2 + \cos^3 t = 2 + \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = 2 + \frac{1}{8}\bigl(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}\bigr) \\ &= \frac{1}{8}e^{-3it} + \frac{3}{8}e^{-it} + 2 + \frac{3}{8}e^{it} + \frac{1}{8}e^{3it} \qquad \textit{(komplexe FOURIER-Reihe)} \\ &= 2 + \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t \qquad \textit{(reelle FOURIER-Reihe)}\,. \end{aligned}$$

Im Falle der komplex gegebenen Funktion $h(t)$ wird man wohl auf jeden Fall zunächst die komplexe FOURIER-Reihe berechnen, die hier einfach eine geometrische Reihe ist, um dann daraus via EULER die „reelle" Reihe zu bekommen, die hier allerdings teilweise komplexe Koeffizienten hat:

$$h(t) = \frac{1-e^{iNt}}{1-e^{it}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{k\cdot it} = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \cos kt + i \sum_{k=1}^{N-1} \sin kt\,.$$

g) Der zweiweggleichgerichtete Sinus ist die Funktion $f(t) = |\sin t|$. Skizzieren Sie diese Funktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und berechnen Sie ihre reelle FOURIER-Reihe!

Lösung:



Da $|\sin t|$ im Intervall $[\pi, 2\pi]$ genauso aussieht wie in$[0, \pi]$, ist $f(t)$ bereits periodisch zur Periode π; die zugehörige Kreisfrequenz ist somit $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Außerdem ist $|\sin t|$ eine gerade Funktion; in der FOURIER-Reihe treten daher keine Sinusterme auf. Wir müssen also nur den konstanten Term und die Kosinusterme berechnen.

Bei der Bestimmung von deren Koeffizienten arbeiten wir mit dem Periodenintervall $[0, \pi]$, in dem der Sinus nicht negativ wird; deshalb können wir die Betragsstriche weglassen.

Der konstante Term ist $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{-\cos\pi + \cos 0}{\pi} = \frac{2}{\pi}$.

Ansonsten haben wir noch Terme der Form $a_k \cos 2kt$ mit

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cos 2kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot\frac{e^{2kit}+e^{-2kit}}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{e^{(2k+1)it}-e^{-(2k+1)it}}{2i} - \frac{e^{(2k-1)it}-e^{-(2k-1)it}}{2i}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(\sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t\big)\,dt \\
&= \frac{-\cos(2k+1)\pi + \cos 0}{(2k+1)\pi} - \frac{-\cos(2k-1)\pi + \cos 0}{(2k-1)\pi} \\
&= \frac{2}{(2k+1)\pi} - \frac{2}{(2k-1)\pi} = \frac{-4}{(4k^2-1)\pi}\,.
\end{aligned}$$

Die FOURIER-Reise von $|\sin t|$ ist also $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{4k^2-1}$.

Alternativ hätten wir das Integral auch über eine zweifache partielle Integration ausrechnen können:

$$\int_0^\pi \sin t \cos 2kt \, dt = -\cos t \cos 2kt \Big|_0^\pi - 2k \int_0^\pi \cos t \sin 2kt \, dt$$

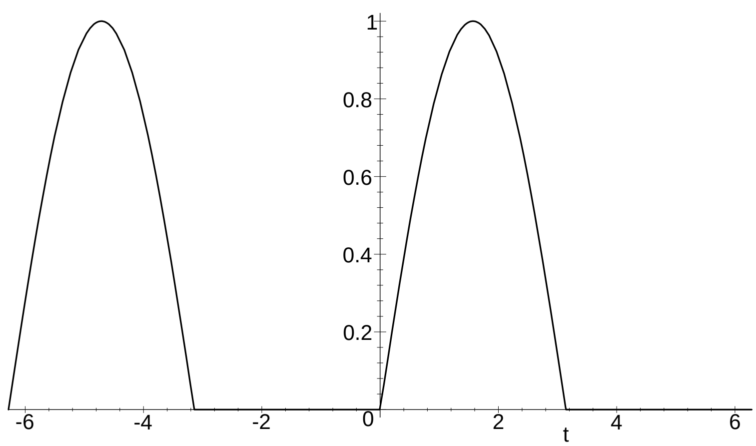
$$= 2 - 2k \left(\sin t \cos 2kt \Big|_0^\pi - 2k \int_0^\pi \sin t \cos 2kt \, dt \right) = 2 + 4k^2 \int_0^\pi \sin t \cos 2kt \, dt\,.$$

Damit ist $(1-4k^2)\int_0^\pi \sin t \cos 2kt \, dt = 2$, also

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cos 2kt \, dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1-4k^2} = \frac{-4}{(4k^2-1)\pi}\,.$$

h) Die einweggleichgerichtete Sinusfunktion ist $f(t) = \max(\sin t, 0)$. Skizzieren Sie auch diese Funktion, und berechnen Sie, ausgehend von der der zweiweggleichgerichteten Sinusfunktion, ihre reelle FOURIER-Reihe ohne zusätzliche Integrationen!

Lösung:



Für alle t mit $\sin t \geq 0$ ist $f(t) = \max(\sin t, 0) = |\sin t|$; für die t mit $\sin t \leq 0$ dagegen ist $f(t) = \sin t + |\sin t|$. Also ist

$$f(t) = \max(\sin t, 0) = \frac{\sin t + |\sin t|}{2}\,.$$

Die FOURIER-Reihe der Sinusfunktion besteht nur aus dem Term $\sin t$, die von $|\sin t|$ haben wir gerade berechnet; also ist die FOURIER-Reise von $f(t)$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{4k^2-1}\,.$$

i) Schließen Sie aus dem vorigen Ergebnis, wiederum ohne neue Integrationen, auf die FOURIER-Reihe der einweggleichgerichteten Kosinusfunktion $f(t) = \max(\cos t, 0)$!

Lösung: Da $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ ist, hat f die FOURIER-Reihe

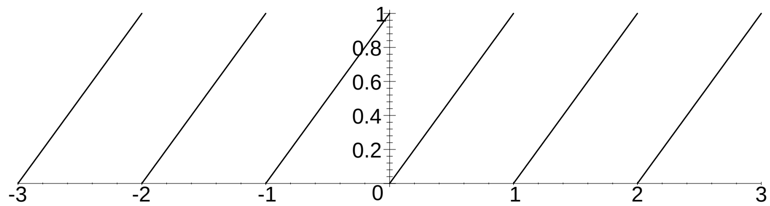
$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{\pi}{2} - t\Big) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{4k^2-1} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k(\pi - 2t)}{4k^2-1}\,.$$

Für gerade Werte von k ist $\cos k(\pi - 2t) = \cos(2k\pi - 2t) = \cos(-2t) = \cos 2t$, für ungerades k ist $\cos k(\pi - 2t) = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t$, also ist

$$S_f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cos 2kt}{4k^2 - 1} .$$

j) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = t - [t]$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich t bezeichnet, im Intervall $[0, 5]$, und berechnen Sie ihre reelle FOURIER-Reihe!

Lösung:



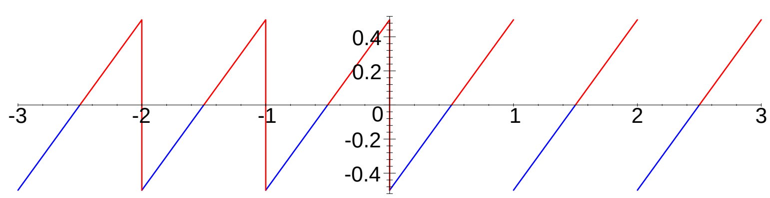
Die Funktion ist offensichtlich periodisch mit Periode $T = 1$, hat also die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi$. Sie ist leider weder gerade noch ungerade.
Sie wird allerdings fast ungerade, wenn wir $\frac{1}{2}$ subtrahieren: Für eine ganze Zahl n eine reelle Zahl t mit $0 < t < 1$ ist

$$f(n+t) = t \quad \text{und} \quad f(-n-t) = f\bigl(-(n+1) + (1-t)\bigr) = 1 - t\,,$$

also

$$f(n+t) - \frac{1}{2} = t - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f(-n-t) - \frac{1}{2} = 1 - t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - t = -f(n+t)\,.$$

Für $t = 0$ ist diese Formel zwar falsch, aber für die Berechnung der Integrale stört es nicht, wenn wir den Integranden an den Intevallenden (oder sonst irgendwelchen endlich vielen Punkten) verändern.
Wir betrachten also die ungerade Funktion $g(t) = f(t) - \frac{1}{2}$, von der wir wissen, daß in ihrer FOURIER-Reihe nur Sinusterme auftreten.



Zur Berechnen von deren Koeffizienten beachten wir, daß $f(t) = t$ ist für $0 \le t < 1$, also ist dort $g(t) = t - \frac{1}{2}$. Damit ist

$$b_\ell = \frac{2}{1}\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin 2\ell\pi t\,dt = 2\int_0^1 t\sin 2\ell\pi t\,dt - \int_0^1 \sin 2\ell\pi t\,dt\,.$$

Das zweite Integral läßt sich direkt berechnen:

$$\int_0^1 \sin 2\ell\pi t\,dt = -\left.\frac{\cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi}\right|_0^1 = \frac{-1-(-1)}{2\ell\pi} = 0\,,$$

was eigentlich auch ohne Rechnung klar gewesen wäre, da wir eine reine Schwingung über eine volle Periode integrieren.

Für das zweite Integral müssen wir die Regel zur partiellen Integration anwenden: Danach ist

$$\int t \sin 2\ell\pi t \, dt = -\frac{t \cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} + \int \frac{\cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} \, dt = -\frac{t \cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} + \frac{\sin 2\ell\pi t}{(2\ell\pi)^2} \,,$$

also

$$\int_0^1 t \sin 2\ell\pi t \, dt = -\frac{t \cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} + \frac{\sin 2\ell\pi t}{(2\ell\pi)^2} \bigg|_0^1 = -\frac{1}{2\ell\pi}$$

und $b_\ell = -\frac{1}{\ell\pi}$. Somit ist die FOURIER-Reihe von $g(t)$ gleich $-\frac{1}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin 2\ell\pi t}{\ell}$, und die von f unterscheidet sich davon nur durch Addition eines konstanten Terms $\frac{1}{2}$, ist also

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin 2\ell\pi t}{\ell} \,.$$

Bemerkung: Auch ohne den Trick mit der ungeraden Funktion g ist der Rechenaufwand in diesem Beispiel nicht sehr viel größer: Wenn man stur die Formeln aus der Vorlesung auswertet, kann man auch wieder bei der Integration über das Intervall $[0, 1]$ überall $f(t)$ durch t ersetzen, also ist der konstante Koeffizient, das Periodenmittel, gleich

$$a_0 = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} \,,$$

was auch ohne Integration rein elementargeometrisch klar ist.

Für die weiteren Terme braucht man die Integrale über $t \cos 2k\pi t$ und $t \sin 2\ell\pi t$, muß also die Formel für partielle Integration anwenden:

$$\int t \cos 2k\pi t \, dt = \frac{t \sin kt}{2k\pi} - \int \frac{\sin 2k\pi t}{2k\pi} \, dt = \frac{t \sin 2k\pi t}{2k\pi} + \frac{\cos 2k\pi t}{(2k\pi)^2}$$

und

$$\int t \sin 2\ell\pi t \, dt = -\frac{t \cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} + \int \frac{\cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} \, dt = -\frac{t \cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} + \frac{\sin 2\ell\pi t}{(2\ell\pi)^2} \,.$$

Für $k \geq 1$ ist somit

$$a_k = \frac{1}{2} \int_0^1 t \cos 2k\pi t \, dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t \sin 2k\pi t}{2k\pi} + \frac{\cos 2k\pi t}{(2k\pi)^2} \right) \bigg|_0^1 = \frac{1}{(2k\pi)^2} - \frac{1}{(2k\pi)^2} = 0$$

und

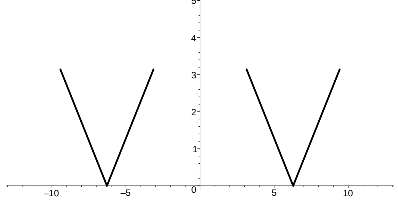
$$b_\ell = \frac{1}{2} \int_0^1 t \sin 2\ell\pi t \, dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{t \cos 2\ell\pi t}{2\ell\pi} + \frac{\sin 2\ell\pi t}{(2\ell\pi)^2} \right) \bigg|_0^1 = -\frac{1}{4\ell\pi} \,.$$

Das Ergebnis ist natürlich dasselbe wie oben.

k) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 4π, und für $t \in [-2\pi, 2\pi]$ sei

$$f(t) = \begin{cases} 2\pi + t & \text{für } -2\pi < t \leq -\pi \\ 2\pi & \text{für } -\pi < t \leq \pi \\ 2\pi - t & \text{für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases} .$$

Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$ und berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!



Lösung:

f hat die Periode $T = 4\pi$, also die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$. Da die Funktion offensichtlich gerade ist, gibt es in der FOURIER-Reihe von f keine Sinusterme, und wir können bei der Berechnung der verbleibenden Koeffizienten eine Fallunterscheidung einsparen, wenn wir beachten, daß für eine gerade Funktion mit Periode T stets gilt

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = 2\int_0^{T/2} f(t)\,dt\,.$$

Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 2\pi\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} 2\pi\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} t\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi^2 - 2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der höheren Kosinusterme lassen sich berechnen als

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\frac{kt}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 2\pi\cos\frac{kt}{2}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\cos\frac{kt}{2}\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} 2\pi\cos\frac{kt}{2}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} t\cos\frac{kt}{2}\,dt\right)\,. \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck verschwindet das erste Integral, da hier ein Kosinus von null bis zu einem ganz- oder halbzahligen Vielfachen der Periodenlänge integriert wird. Für das zweite Integral berechnen wir zunächst durch partielle Integration eine Stammfunktion von $t\cos\omega t$:

$$\int t\cos\omega t\,dt = t\cdot\frac{\sin\omega t}{\omega} - \int\frac{\sin\omega t}{\omega}\,dt = \frac{t\sin\omega t}{\omega} + \frac{\cos\omega t}{\omega^2}\,,$$

d.h. $\int t\cos\frac{kt}{2}\,dt = \frac{2t}{k}\sin\frac{kt}{2} + \frac{4}{k^2}\cos\frac{kt}{2}$. Somit ist

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} t\cos\frac{kt}{2}\,dt = \frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{4}{k}\sin k\pi + \frac{4}{\pi k^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right) \\ &= \frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{4}{\pi k^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right)\,. \end{aligned}$$

Für gerades $k = 2\ell$ ist

$$\sin\frac{k\pi}{2} = \sin\ell\pi = 0, \quad \cos\frac{k\pi}{2} = \cos\ell\pi = (-1)^\ell \quad \text{und} \quad \cos k\pi = 1\,,$$

also ist $a_k = 0$ für durch vier teilbare k und $-8/\pi k^2$ sonst.
Für ungerades $k = 2\ell + 1$ ist

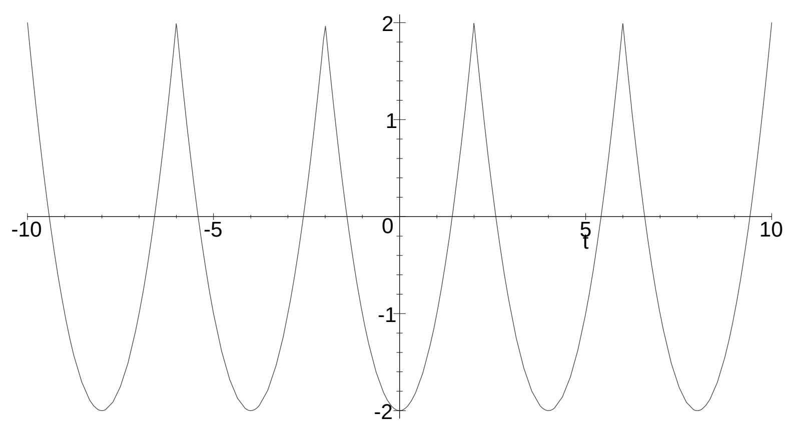
$$\sin\frac{k\pi}{2} = \sin\left(\ell\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^\ell, \quad \cos\frac{k\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \cos k\pi = \cos(2\ell + \pi) = \cos\pi = -1\,,$$

also ist $a_k = (-1)^\ell \left(\frac{2}{k} - \frac{4}{k^2\pi}\right)$, und wir erhalten als Endergebnis

$$a_k = \begin{cases} \frac{5\pi}{4} & \text{falls } k = 0 \text{ ist} \\ 0 & \text{falls } k \neq 0 \text{ durch vier teilbar ist} \\ \frac{-8}{\pi k^2} & \text{falls } k \text{ gerade, aber nicht durch vier teilbar ist} \\ (-1)^\ell \left(\frac{2}{k} - \frac{4}{k^2\pi}\right) & \text{falls } k = 2\ell + 1 \text{ ungerade ist} \end{cases}\;.$$

l) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode vier, und für $t \in [-2, 2]$ sei $f(t) = t^2 - 2$. Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-10, 10]$, und berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

Lösung:



f hat die Periode $T = 4$, also die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Da die Funktion offensichtlich gerade ist, gibt es in der FOURIER-Reihe von f keine Sinusterme.
Der konstante Term ist das Periodenmittel

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} (t^2 - 2)\,dt = \frac{2}{4}\cdot\frac{8}{3} - \frac{8}{4} = -\frac{2}{3}\,.$$

Die Koeffizienten der höheren Kosinusterme lassen sich berechnen als

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^2\cos k\omega t\,dt - \frac{1}{2}\cdot 2\int_{-2}^{2}\cos k\omega t\,dt\,.$$

Das letzte Integral verschwindet, da hier der Kosinus über k volle Perioden integriert wird; bleibt also das erste.
Eine Stammfunktion von $t^2\cos k\omega t$ kann man sich durch zweimalige partielle Integration

verschaffen:

$$\begin{aligned}\int t^2 \cos k\omega t \, dt &= t^2 \frac{\sin k\omega t}{k\omega} - \int 2t \frac{\sin k\omega t}{k\omega} \, dt \\ &= t^2 \frac{\sin k\omega t}{k\omega} - 2t \cdot \frac{-\cos k\omega t}{(k\omega)^2} + \int 2 \cdot \frac{-\cos k\omega t}{(k\omega)^2} \\ &= t^2 \frac{\sin k\omega t}{k\omega} + 2t \cdot \frac{\cos k\omega t}{(k\omega)^2} - 2\frac{\sin k\omega t}{(k\omega)^3} + C\,.\end{aligned}$$

Diese Funktion müssen wir an den Stellen $\pm 2k\omega = \pm 2k \cdot \frac{\pi}{2} = \pm k\pi$ auswerten; da dort der Sinus verschwindet und

$$\cos(\pm k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{für gerade } k \\ 0 & \text{für ungerade } k \end{cases} = (-1)^k$$

ist, erhalten wir das Ergebnis

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{\cos k\omega t}{(k\omega)^2}\bigg|_{-2}^{2} = \big(2-(-2)\big)\frac{(-1)^k}{(k\omega)^2} = \frac{16}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{k^2}\,.$$

Die FOURIER-Reihe von f ist also

$$S_f(t) = -\frac{2}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}t\,.$$