WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. September 2007

a) Berechnen Sie, soweit möglich, die folgenden Integrale über den Residuensatz:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5\,dx}{x^2+100}\,, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10x\,dx}{x^2+100}\,, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{20\,dx}{x^2-100}\,,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\,, \quad I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}$$

b) *Richtig oder falsch:* Die Summe zweier trigonometrischer Polynome ist wieder ein trigonometrisches Polynom.

c) *Richtig oder falsch:* Das Produkt zweier trigonometrischer Polynome $f, g \in P_T(\mathbb{C})$ ist wieder ein trigonometrisches Polynom.

d) *Richtig oder falsch:* Das Produkt zweier trigonometrischer Polynome $f, g \in P_T(\mathbb{R})$ ist wieder ein trigonometrisches Polynom.

e) *Richtig oder falsch:* Jedes trigonometrische Polynom hat eine Stammfunktion, die selbst ein trigonometrisches Polynom ist.

f) Bestimmen Sie die reellen und die komplexen FOURIER-Reihen der folgenden Funktionen:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad g(t) = 2 + \cos^3 t \quad \text{und} \quad h(t) = \frac{1-e^{iNt}}{1-e^{it}} \quad (N \in \mathbb{N})\,!$$

g) Der zweiweggleichgerichtete Sinus ist die Funktion $f(t) = |\sin t|$. Skizzieren Sie diese Funktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und berechnen Sie ihre reelle FOURIER-Reihe!

h) Die einweggleichgerichtete Sinusfunktion ist $f(t) = \max(\sin t, 0)$. Skizzieren Sie auch diese Funktion, und berechnen Sie, ausgehend von der der zweiweggleichgerichteten Sinusfunktion, ihre reelle FOURIER-Reihe ohne zusätzliche Integrationen!

i) Schließen Sie aus dem vorigen Ergebnis, wiederum ohne neue Integrationen, auf die FOURIER-Reihe der einweggleichgerichteten Kosinusfunktion $f(t) = \max(\cos t, 0)$!

j) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = t - [t]$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich t bezeichnet, im Intervall $[0, 5]$, und berechnen Sie ihre reelle FOURIER-Reihe!

k) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 4π, und für $t \in [-2\pi, 2\pi]$ sei

$$f(t) = \begin{cases} 2\pi + t & \text{für } -2\pi < t \le -\pi \\ 2\pi & \text{für } -\pi < t \le \pi \\ 2\pi - t & \text{für } \pi < t \le 2\pi \end{cases}.$$

Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$ und berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

l) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode vier, und für $t \in [-2, 2]$ sei $f(t) = t^2 - 2$. Skizzieren Sie f über dem Intervall $[-10, 10]$, und berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!