Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6. September 2007

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = i(1-i),\ \ z_2 = (3+i)(3-i),\ \ z_3 = (i+1)(i-1),\ \ z_4 = i^{2007},\ \ z_5 = \frac{5+2i}{2+3i},\ \ z_6 = \frac{4+i}{2-i}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z_1 &= i(1-i) = i\cdot 1 - i\cdot i = i-(-1) = 1+i\\
z_2 &= (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9-(-1) = 10\\
z_3 &= (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -1-1 = -2\\
z_4 &= i^{2007} = i\cdot i^{2006} = i\cdot (i^2)^{1003} = i\cdot(-1)^{1003} = -i\\
z_5 &= \frac{5+2i}{2+3i} = \frac{(5+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-2\cdot(-3)-15i+4i}{2^2+3^2} = \frac{16}{13}-\frac{11}{13}i\\
z_6 &= \frac{4+i}{2-i} = \frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8-1+4i+2i}{2^2+1^2} = \frac{7}{5}+\frac{6}{5}i
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie für $z=\sqrt{3}+i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2007} sowie den Betrag!

Lösung:

$$\begin{aligned}
z^2 &= (\sqrt{3}+i)^2 = (\sqrt{3})^2 + i^2 + 2\sqrt{3}\,i = 2+2\sqrt{3}\,i\\
z^3 &= z^2\cdot z = (2+2\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}\sqrt{3}\,i = 8i\\
z^4 &= z^3\cdot z = 8i\cdot(\sqrt{3}+i) = 8\sqrt{3}\,i - 8i^2 = -8+8\sqrt{3}\,i\\
z^{16} &= z^{15}\cdot z = (z^3)^5\cdot z = (8i)^5\cdot(\sqrt{3}+i) = 8^5 i^5\cdot(\sqrt{3}+i) = -2^{15}+2^{15}\sqrt{3}\,i\\
z^{256} &= z^{255}\cdot z = (z^3)^{85} = (8i)^{85}\cdot(\sqrt{3}+i) = 2^{255}i\cdot(\sqrt{3}+i) = -2^{255}+2^{255}\sqrt{3}\,i\\
z^{2007} &= (z^3)^{669} = (8i)^{669} = 2^{2007}\cdot i^{669} = 2^{2007}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {}&14696072899510457910180264975074329395485666586735298566113827031369808145822340017365 2\\
&41424851280254956108347379039523500123122699047108242251921358933160773008638610599971 8\\
&40088163730974725743542902654728126239332046779346737710585256579333179693308275839559 4\\
&44787047544912589519783891140629020412202583212053620350010688717104574055412999539319 6\\
&51392054912347738448106306817040926244005345442289064602444671410741520258787821875717 3\\
&96461207456197233847539467765831034596299478021012490490523728714592688694474716929987 6\\
&2864466168730297714115530033697602245574768650532387466469957808155966094707576012 8i
\end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - i^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ mit $z^3=-1$!

Lösung: Aus der vorigen Aufgabe wissen wir, daß für $z_0 = (\sqrt{3}+i)$ gilt $z_0^3 = 8i$, also $(z_0^2)^3 = z_0^6 = -64 = -4^3$. Somit hat $\frac14 z_0^2 = \frac{2+2\sqrt{3}\,i}{4} = \frac12 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dritte Potenz -1.

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ mit $z^3=1$!

Lösung: Da $(-z)^3 = -z^3$ für jede komplexe Zahl z, können wir einfach $z = -\frac12 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ setzen.

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$!

Lösung: $z\cdot\overline{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$

f) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

Lösung: Für gerade $k = 2\ell$ ist $(ix)^k = i^k x^k = (-1)^\ell x^k$, für ungerade $k = 2\ell + 1$ ist $(ix)^k = i^k x^k = i \cdot (-1)^\ell x^k$. Somit ist

$$f(ix) = \sum_{\ell=0}^{[n/2]} (-1)^\ell x^{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^\ell x^{2\ell+1} \,.$$

g) Schreiben Sie die Funktion $\sin 2x \cdot \sin 3y$ als Summe von reinen Sinus- und Cosinustermen!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sin 2x \cdot \sin 3y &= \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \cdot \frac{e^{3iy} - e^{-3iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(2x+3y)} - e^{i(2x-3y)} - e^{-i(2x-3y)} + e^{i(2x+3y)}}{(-4)} \\
&= -\frac{e^{i(2x+3y)} + e^{i(2x+3y)}}{4} + \frac{e^{i(2x-3y)} + e^{-i(2x-3y)}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\cos(2x - 3y) - \frac{1}{2}\cos(2x + 3y)
\end{aligned}$$

h) Zeigen Sie: e^z verschwindet für keine komplexe Zahl z.

Lösung: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Da die reelle Exponentialfunktion keine Nullstellen hat und Sinus und Cosinus im Reellen keine gemeinsame Nullstelle haben, kann dieses Produkt nie verschwinden.

i) Zeigen Sie: $e^z = 1$ genau dann, wenn z ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist.

Lösung: Sei wieder $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Da e^{iy} stets den Betrag eins hat, ist $|e^z| = e^x$, was genau für $x = 0$ den Wert eins hat. Damit nicht nur $|e^z|$, sondern sogar $e^z = 1$ ist, muß auch $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$ sein, d.h. $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$. Der Sinus verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von π, und für $k \in \mathbb{Z}$ ist $\cos k\pi = (-1)^k$. Daher muß y ein geradzahliges Vielfaches von π sein, z also ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

j) Betrachten Sie $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ für beliebige komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$. Wo haben diese Funktionen ihre Nullstellen?

Lösung: $\sinh z = 0$ genau dann, wenn $e^z = e^{-z}$ ist, d.h. $e^{2z} = 1$. Dies ist, wie wir gerade gesehen haben, genau dann der Fall, wenn $2z$ ein ganzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist, z selbst also eines von πi.

$\cosh z = 0$ genau dann, wenn $e^z = -e^{-z}$ ist, d.h. $e^{2z} = -1 = e^{\pi i}$ oder $e^{2z-\pi i} = 1$. Hier muß $2z$ also ein ungeradzahliges Vielfaches von π sein, d.h. $z = (k + \frac{1}{2})\pi i$ für eine ganze Zahl k.

k) Welche der Funktionen $f(z) = 2\cosh z$, $g(z) = e^z + e^{\overline{z}}$ und $h(z) = z^2 \sin z$ ist komplex differenzierbar?

Lösung: Wir können z.B. die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verwenden: Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
2\cosh z &= e^z + e^{-z} = e^{x+iy} + e^{-x-iy} \\
&= e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y) \\
&= (e^x + e^{-x})\cos y + i(e^x - e^{-x})\sin y \,.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$u(x,y) = \Re f(x+iy) = (e^x + e^{-x}) \cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = \Im f(x+iy) = (e^x - e^{-x}) \sin y\,.$$

Ableiten zeigt, daß

$$u_x(x,y) = (e^x - e^{-x}) \cos y \quad \text{und} \quad v_y(x,y) = (e^x - e^{-x}) \cos y$$

übereinstimmen, während sich

$$u_y(x,y) = -(e^x + e^{-x}) \sin y \quad \text{und} \quad v_x(x,y) = (e^x + e^{-x}) \sin y$$

genau im Vorzeichen unterscheiden. Somit ist f komplex differenzierbar.
Die entsprechende Rechnung für $g(z)$ führt auf

$$\begin{aligned} g(z) &= e^z + e^{\overline{z}} = e^{x+iy} + e^{x-iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) + e^x(\cos y - i \sin y) = 2e^x \cos y\,. \end{aligned}$$

Somit ist hier

$$u(x,y) = \Re g(x+iy) = 2e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = \Im g(x+iy) = 0\,.$$

Ganz offensichtlich sind hier die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen nicht erfüllt, d.h. g ist nicht komplex differenzierbar.
Auch für $h(z)$ könnten wir die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verwenden, schneller geht es allerdings, wenn wir beachten, daß jede Funktion, die durch Grundrechenarten und Hintereinanderausführungen aus Potenzen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen hervorgeht, holomorph ist, was hier offensichtlich der Fall ist – wie übrigens schon bei $f(z)$, wo die ausführliche Rechnung oben also auch überflüssig gewesen wäre.

l) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z-3}, \qquad I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \qquad I_5 = \int_\gamma e^{\cos z}\, dz$$

Lösung: Der Integrationsweg γ ist eine Kreislinie um den Nullpunkt mit Radius zwei, die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Daher ist $I_1 = 2\pi i$, wie wir in der Vorlesung sogar für noch allgemeinere Kurven um den Nullpunkt gezeigt haben.
Der Integrand $1/(z-3)$ von I_2 ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{3\}$; in einer offenen Menge also, die sowohl das Innere der Kreisscheibe um Null mit Radius zwei als auch deren Rand enthält. Daher verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.
Der Integrand $1/z^2$ von I_3 ist natürlich nicht holomorph im Nullpunkt, aber wir haben mit $F(z) = -1/z$ eine Stammfunktion, die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist. Insbesondere ist sie holomorph in einer Umgebung des Integrationswegs; daher ist

$$I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2} = F\big(\gamma(\pi)\big) - F\big(\gamma(-\pi)\big) = 0\,,$$

da $\gamma(\pi) = \gamma(-\pi) = -1$ ist.
Der Integrand $1/(z^2+1)$ von I_4 ist gleich an zwei inneren Punkten der Kreisscheibe nicht holomorph: Bei $z = i$ und bei $z = -i$. Der Ansatz

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z-i} + \frac{\beta}{z+i} = \frac{(\alpha+\beta)z + (\beta-\alpha)i}{z^2+1}$$

zur Partialbruchzerlegung führt auf $\alpha = -\beta = \frac{i}{2}$, also ist

$$I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z-i} - \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{dz}{z+i}\,.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite sind Integrale über einen Integranden der Form $1/(z-a)$ mit einem Punkt a, der im Innern der Kreisscheibe liegt; also haben beide den Wert $2\pi i$. Da die Vorfaktoren entgegengesetzt gleich sind, verschwindet die Summe I_4.

Der Integrand von I_5 ist als Hintereinanderausführung zweier auf ganz $\mathbb{C}$ holomorpher Funktionen selbst auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; damit ist klar, daß *jedes* Integral längs einer geschlossenen Kurve nach dem CAUCHYschen Integralsatz verschwindet.

m) Welche dieser Integrale ändern Ihren Wert, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto 3+e^{it} \end{cases}$ betrachtet?

Lösung: δ beschreibt einen Kreis um drei mit Radius eins, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. In der zugehörigen Kreisscheibe sowie einer Umgebung davon sind die Integranden von I_1, I_3, I_4 und I_5 holomorph, also verschwinden die entsprechenden Integrale. Bei I_2 führt die Transformation $u = z-3$ auf das Integral über $1/u$ über einen Kreis um Null, das Integral ist also gleich $2\pi i$.

n) Die komplexe Zahl z sei in Polarkoordinaten dargestellt als $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \le \varphi$. Was ist $\operatorname{Ln} z$?

Lösung: Natürlich ist $\operatorname{Ln} r = \ln r$ der gewöhnliche natürliche Logarithmus reeller Zahlen. Da Ln als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion auf dem Streifen $-\pi < \Im\mathfrak{m}\, z \le \pi$ definiert ist, ist auch $\operatorname{Ln} e^{i\varphi} = i\varphi$. Die Summe $\ln r + i\varphi$ liegt im Streifen $-\pi < \Im\mathfrak{m}\, z \le \pi$ und $e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r}e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z$. Somit ist $\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi$.

o) Was ist $\operatorname{Ln} i$?

Lösung: Da $e^{\pi i/2} = i$ ist, folgt $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$.

p) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\dfrac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?

Lösung: Wegen $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{24} - \dfrac{z^6}{720} + \cdots$ ist $\dfrac{\cos z}{z^4} = \dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{z^2}{720} + \cdots$, der Hauptteil ist also $\dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{2z^2}$.

q) Was sind $\operatorname{Res}_{-1} \dfrac{z+2}{(z+1)^2}$, $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^2}$ und $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^5}$

Lösung: $\dfrac{z+2}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{z+1}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{1}{z+1}$, und das ist bereits die gesamte LAURENT-Reihe um $z = -1$. Also ist das Residuum gleich eins.

Die TAYLOR-Reihe des Kosinus ist

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots \quad ,$$

die LAURENT-Reihe von $\frac{\cos z}{z^2}$ also

$$\frac{\cos z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-2}}{(2k)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} - \frac{z^4}{720} + \cdots \quad .$$

Genau wie die TAYLOR-Reihe des Kosinus enthält sie nur Terme mit positiven Exponenten, das Residuum verschwindet also.
Für $\frac{\cos z}{z^5}$ erhalten wir entsprechend die LAURENT-Reihe

$$\frac{\cos z}{z^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-5}}{(2k)!} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z} - \frac{z}{720} + \cdots \quad ,$$

hier ist das Residuum also $\frac{1}{24}$.

r) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{13}}\,dz$?

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, enthält die TAYLOR-Reihe von f nur ungerade z-Potenzen. Die LAURENT-Reihe von $\dfrac{f(z)}{z^{13}}$ entsteht daraus durch Division durch z^{13}, enthält also nur *gerade* Potenzen. Insbesondere gibt es keinen Term mit z^{-1}, das Residuum von $\dfrac{f(z)}{z^{13}}$ bei Null ist also Null, und weitere Pole gibt es nicht wegen der Holomorphie von f. Daher verschwindet das Integral.

s) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$!

Lösung: Bei diesem Intgegral könnte man zwar über eine Partialbruchzerlegung relativ schnell eine Stammfunktion des Integranden finden, insgesamt dürfte der Rechenaufwand allerdings beim Umweg über das Komplexe etwas geringer sein.
Das Nennerpolynom $(x^2+1)(x^2+9)$ verschwindet für $x = \pm i$ und $x = \pm 3i$, an diesen vier Stellen hat der Integrand also Pole.
Der Integrationsweg sei wie oben; hier sei er zur Abwechslung noch einmal formal erklärt: Wir betrachten zunächst den Halbkreis γ_R um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.
δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.
Für $R > 3$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = i$ und $z_2 = 3i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h.

$$\operatorname{Res}_{z=z_\nu} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to z_\nu} \frac{16(z-z_\nu)z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} .$$

Damit ist

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{16z^2}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{16i^2}{(2i)(i^2+9)} = \frac{-16}{16i} = i$$

und

$$\operatorname{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z+3i)} = \frac{16\cdot 9i^2}{(9i^2+1)(6i)} = \frac{-16\cdot 9}{-8\cdot 6i} = -3i\,.$$

Somit ist

$$\int\limits_{\delta_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} + \operatorname{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} \right)$$

$$= 2\pi i\big(i - 3i\big) = 4\pi\,.$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = \int_0^\pi \frac{16R^2e^{2it}\cdot iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4)}\,dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.

t) *(Aus der Modulklausur 2005)* Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}\,dx\,!$

Lösung: Für reelles $R > 0$ sei der Integrationsweg γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}\,.$$

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Zur Berechnung von $\displaystyle\int_{\delta_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz$ brauchen wir also zunächst die Pole des Integranden; diese sind die Nullstellen der beiden Faktoren des Nenners, also $z = \pm i$ für den ersten und $z = -2 \pm i$ für den zweiten. Insbesondere sind alle Pole einfach.

Im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises liegen (für $R > \sqrt{13}$) nur die beiden Pole mit dem positiven Imaginärteil; wir brauchen also deren Residuen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to i} \frac{16z(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\\
&= \lim_{z\to i} \frac{16z}{(z+i)(z^2+4z+5)} = \frac{16i}{2i\cdot(-1+4i+5)}\\
&= \frac{8}{4+4i} = \frac{2}{1+i} = 1-i\\
\operatorname{Res}_{z=-2+i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} &= \lim_{z\to -2+i} \frac{16z(z+2-i)}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\\
&= \lim_{z\to -2+i} \frac{16z}{(z^2+1)(z+2+i)} = \frac{16\cdot(-2+i)}{(4-4i)\cdot 2i}\\
&= \frac{16\cdot(-2+i)}{8+8i} = \frac{-4+2i}{1+i} = \frac{(-4+2i)(1-i)}{2} = -1+3i
\end{aligned}$$

Nach dem Residuensatz ist daher für $R > \sqrt{13}$

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz\\
&= 2\pi i \cdot \left(\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)} + \operatorname{Res}_{z=-2+3i} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\right)\\
&= 2\pi i \cdot (1 - i - 1 + 3i) = -4\pi\,.
\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{16z}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}\,dz = \int_0^\pi \frac{16iR^2e^{2it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4Re^{it}+5)}\,dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ zum Integral über die reelle Achse wird.