

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6. September 2007

- a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
 $z_1 = i(1 - i)$, $z_2 = (3 + i)(3 - i)$, $z_3 = (i + 1)(i - 1)$, $z_4 = i^{2007}$, $z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}$, $z_6 = \frac{4+i}{2-i}$
- b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3} + i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2007} sowie den Betrag!
- c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!
- d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = 1$!
- e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\frac{1}{z} = \bar{z}$!
- f) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum_{k=0}^n z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!
- g) Schreiben Sie die Funktion $\sin 2x \cdot \sin 3y$ als Summe von reinen Sinus- und Cosinustermen!
- h) Zeigen Sie: e^z verschwindet für keine komplexe Zahl z .
- i) Zeigen Sie: $e^z = 1$ genau dann, wenn z ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist.
- j) Betrachten Sie $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ für beliebige komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$. Wo haben diese Funktionen ihre Nullstellen?
- k) Welche der Funktionen $f(z) = 2 \cosh z$, $g(z) = e^z + e^{\bar{z}}$ und $h(z) = z^2 \sin z$ ist komplex differenzierbar?
- l) Berechnen Sie für $\gamma: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}, \quad I_2 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3}, \quad I_3 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}, \quad I_4 = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}, \quad I_5 = \int_{\gamma} e^{\cos z} dz$$

- m) Welche dieser Integrale ändern Ihren Wert, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ betrachtet?
- n) Die komplexe Zahl z sei in Polarkoordinaten dargestellt als $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \varphi$. Was ist $\operatorname{Ln} z$?
- o) Was ist $\operatorname{Ln} i$?
- p) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\frac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?
- q) Was sind $\operatorname{Res}_{-1} \frac{z+2}{(z+1)^2}$, $\operatorname{Res}_0 \frac{\cos z}{z^2}$ und $\operatorname{Res}_0 \frac{\cos z}{z^5}$?
- r) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{13}} dz$?
- s) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$!
- t) (Aus der Modulklausur 2005) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x}{(x^2+1)(x^2+4x+5)} dx$!